MATEMATIKA

SMA/MA/
SMK/MAK
KELAS
XI
Semester 1

Disklaimer: *Buku ini merupakan buku siswa yang dipersiapkan Pemerintah dalam rangka implementasi Kurikulum 2013. Buku siswa ini disusun dan ditelaah oleh berbagai pihak di bawah koordinasi Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, dan dipergunakan dalam tahap awal penerapan Kurikulum 2013. Buku ini merupakan "dokumen hidup" yang senantiasa diperbaiki, diperbaharui, dan dimutakhirkan sesuai dengan dinamika kebutuhan dan perubahan zaman. Masukan dari berbagai kalangan diharapkan dapat meningkatkan kualitas buku ini.*

Katalog Dalam Terbitan (KDT)

Indonesia. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.
Matematika/Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.-- Edisi Revisi.
Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, 2014.
viii, 200 hlm. : ilus. ; 25 cm.

Untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas XI Semester 1
ISBN 978-602-282-095-6 (jilid lengkap)
ISBN 978-602-282-097-0 (jilid 2a)

1. Matematika — Studi dan Pengajaran I. Judul
II. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan

510

Kontributor Naskah : Bornok Sinaga, Pardomuan N.J.M. Sinambela, Andri Kristianto Sitanggang, Tri Andri Hutapea, Lasker Pangarapan Sinaga, Sudianto Manullang, Mangara Simanjorang, dan Yuza Terzalgi Bayuzetra.
Penelaah : Agung Lukito, Turmudi, dan Dadang Juandi.
Penyelia Penerbitan : Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemdikbud.

Cetakan Ke-1, 2014
Disusun dengan huruf Times New Roman, 11 pt.

Kata Pengantar

Matematika adalah bahasa universal untuk menyajikan gagasan atau pengetahuan secara formal dan presisi sehingga tidak memungkinkan terjadinya multi tafsir. Penyampaiannya adalah dengan membawa gagasan dan pengetahuan konkret ke bentuk abstrak melalui pendefinisian variabel dan parameter sesuai dengan yang ingin disajikan. Penyajian dalam bentuk abstrak melalui matematika akan mempermudah analisis dan evaluasi selanjutnya.

Permasalahan terkait gagasan dan pengetahuan yang disampaikan secara matematis akan dapat diselesaikan dengan prosedur formal matematika yang langkahnya sangat presisi dan tidak terbantahkan. Karenanya matematika berperan sebagai alat komunikasi formal paling efisien. Perlu kemampuan berpikir kritis-kreatif untuk menggunakan matematika seperti uraian diatas: menentukan variabel dan parameter, mencari keterkaitan antar variabel dan dengan parameter, membuat dan membuktikan rumusan matematika suatu gagasan, membuktikan kesetaraan antar beberapa rumusan matematika, menyelesaikan model abstrak yang terbentuk, dan mengkonkretkan nilai abstrak yang diperoleh.

Buku Matematika Kelas XI untuk Pendidikan Menengah ini disusun dengan tujuan memberi pengalaman konkret-abstrak kepada peserta didik seperti uraian diatas. Pembelajaran matematika melalui buku ini akan membentuk kemampuan peserta didik dalam menyajikan gagasan dan pengetahuan konkret secara abstrak, menyelesaikan permasalahan abstrak yang terkait, dan berlatih berfikir rasional, kritis dan kreatif.

Sebagai bagian dari Kurikulum 2013 yang menekankan pentingnya keseimbangan kompetensi sikap, pengetahuan dan keterampilan, kemampuan matematika yang dituntut dibentuk melalui pembelajaran berkelanjutan: dimulai dengan meningkatkan pengetahuan tentang metode-metode matematika, dilanjutkan dengan keterampilan menyajikan suatu permasalahan secara matematis dan menyelesaikannya, dan bermuara pada pembentukan sikap jujur, kritis, kreatif, teliti, dan taat aturan.

Buku ini menjabarkan usaha minimal yang harus dilakukan peserta didik untuk mencapai kompetensi yang diharapkan. Sesuai dengan pendekatan yang dipergunakan dalam Kurikulum 2013, peserta didik diberanikan untuk mencari dari sumber belajar lain yang tersedia dan terbentang luas di sekitarnya. Peran guru sangat penting untuk meningkatkan dan menyesuaikan daya serap peserta didik dengan ketersedian kegiatan pada buku ini. Guru dapat memperkayanya dengan kreasi dalam bentuk kegiatan-kegiatan lain yang sesuai dan relevan yang bersumber dari lingkungan sosial dan alam.

Implementasi terbatas pada tahun ajaran 2013/2014 telah mendapat tanggapan yang sangat positif dan masukan yang sangat berharga. Pengalaman tersebut dipergunakan semaksimal mungkin dalam menyiapkan buku untuk implementasi menyeluruh pada tahun ajaran 2014/2015 dan seterusnya. Walaupun demikian, sebagai edisi pertama, buku ini sangat terbuka dan terus dilakukan perbaikan untuk penyempurnaan. Oleh karena itu, kami mengundang para pembaca memberikan kritik, saran dan masukan untuk perbaikan dan penyempurnaan pada edisi berikutnya. Atas kontribusi tersebut, kami mengucapkan terima kasih. Mudah-mudahan kita dapat memberikan yang terbaik bagi kemajuan dunia pendidikan dalam rangka mempersiapkan generasi seratus tahun Indonesia Merdeka (2045).

Jakarta, Januari 2014

Menteri Pendidikan dan Kebudayaan

Mohammad Nuh

DAFTAR ISI

“Pendidikan adalah senjata paling mematikan di dunia,
karena dengan itu Anda dapat mengubah dunia”
– Nelson Mandela

Kami ucapkan :
Selamat belajar & mengajar
Jangan menyerah, suksesmu adalah sukses kita semua

PETA KONSEP MATEMATIKA SMA KELAS XI
MASALAH OTENTIK
MATEMATIKA
ABSTRAKSI PIKIRAN
GEOMETRI
ALJABAR
TRIGONOMETRI
KALKULUS
STATISTIK
OPERASI
OBJEK MATEMATIKA
FAKTA
PROSEDUR
KONSEP
PRINSIP
Sistem Persamaan Linier & Pertidaksamaan Linier
Sistem Koordinat
Fungsi
Limit Fungsi
Bangun Datar
PENGUKURAN
Matriks
Program Linear
Lingkaran
Peluang
Statistika
Persamaan Garis Lurus
Barisan Tak Hingga
Turunan Fungsi
Integral Tak Tentu
Aturan Pencacahan
Trigonometri
Transformasi Geometri
KETERANGAN:
adalah materi prasyarat yang dipelajari SMP dan SMA kelas 10
adalah pokok bahasan yang dipelajari
adalah keterkaitan secara hirarkis matematika
adalah objek matematika yang dikaji pada setiap bahasan matematika
adalah bidang kajian matematika

Bab 1

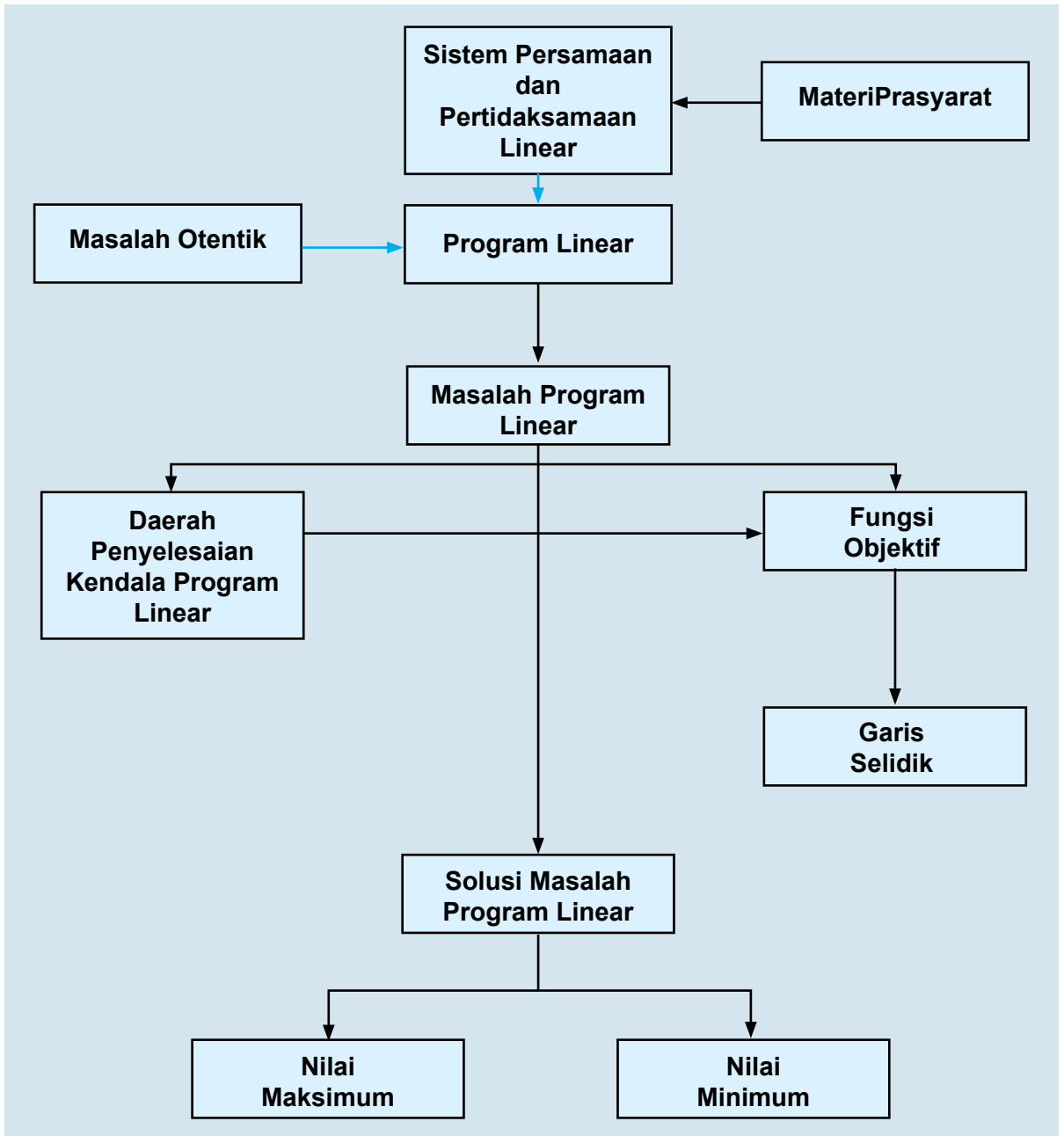
PROGRAM LINEAR

A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
1. Memiliki motivasi internal, kemampuan bekerjasama, konsisten, sikap disiplin, rasa percaya diri, dan sikap toleransi dalam perbedaan strategi berpikir dalam memilih dan menerapkan strategi menyelesaikan masalah. 2. Menunjukkan sikap bertanggung jawab, rasa ingin tahu, jujur dan perilaku peduli lingkungan. 3. Mendeskripsikan konsep sistem per-samaan dan pertidaksamaan linear dua variabel dan menerapkannya dalam pemecahan masalah program linear. 4. Menerapkan prosedur yang sesuai untuk menyelesaikan masalah program linear terkait masalah nyata dan menganalisis kebenaran langkah langkahnya. 5. Menganalisis bagaimana menilai validitas argumentasi logis yang digunakan dalam matematika yang sudah dipelajari terkait pemecahan masalah program linear. 6. Merancang dan mengajukan masalah nyata berupa masalah program linear, dan menerapkan berbagai konsep dan aturan penyelesaian system pertidaksamaan linear dan menentukan nilai optimum dengan menggunakan fungsi selidik yang ditetapkan	Melalui pembelajaran Program Linear, siswa memperoleh pengalaman belajar: • mengamati secara cermat aturan susunan objek. • berpikir mandiri mengajukan ide secara bebas dan terbuka. • menemukan hubungan-hubungan di antara objek-objek. • melatih berpikir kritis dan kreatif. • bekerjasama menyelesaikan masalah.

Istilah Penting

- *Kendala/Keterbatasan (Constraint)*
- *Optimum (Maksimum atau minimum)*
- *Daerah Layak, Daerah Jawab, Daerah Penyelesaian*
- *Garis Selidik*
- *Titik Optimum*

B. PETA KONSEP

C. MATERI PEMBELAJARAN

1. Model Matematika

Pada subbab ini, kita akan mempelajari bagaimana masalah dalam kehidupan sehari-hari dapat diselesaikan dengan matematika. Namun, sangat dibutuhkan kemampuan berpikir logis untuk mengubah masalah sehari-hari ke bentuk matematika.

Mari kita perhatikan masalah berikut ini.

Masalah-1.1

Sekelompok tani transmigran mendapatkan 10 hektar tanah yang dapat ditanami padi, jagung, dan palawija lain. Karena keterbatasan sumber daya petani harus menentukan berapa bagian yang harus ditanami padi dan berapa bagian yang harus ditanami jagung, sedangkan palawija lainnya ternyata tidak menguntungkan. Untuk suatu masa tanam, tenaga yang tersedia hanya 1550 jam/orang, pupuk juga terbatas, tak lebih dari 460 kilogram, sedangkan air dan sumber daya lainnya cukup tersedia. Diketahui pula bahwa untuk menghasilkan 1 kuintal padi diperlukan 10 jam-orang tenaga dan 5 kilogram pupuk, dan untuk 1 kuintal jagung diperlukan 8 jam/orang tenaga dan 3 kilogram pupuk. Kondisi tanah memungkinkan menghasilkan 50 kuintal padi per hektar atau 20 kuintal jagung per hektar. Pendapatan petani dari 1 kuintal padi adalah Rp 40.000 sedang dari 1 kuintal jagung Rp 30.000, dan dianggap bahwa semua hasil tanamnya selalu habis terjual.
Masalah bagi petani ialah bagaimanakah rencana produksi yang memaksimumkan pendapatan total? Artinya berapa hektar tanah harus ditanami padi dan berapa hektar tanah harus ditanami jagung

Perumusan Masalah

Mari kita mengkaji jika hasil padi dan jagung dinyatakan per kuintal.

Berdasarkan masalah di atas, diketahui bahwa setiap 1 hektar menghasilkan 50 kuintal padi. Artinya, untuk 1 kuintal padi diperlukan 0,02 hektar. Demikian juga, untuk 1 kuintal jagung diperlukan 0,05 hektar.

Cermati angka-angka yang tersaji pada tabel berikut ini!

Tabel 1.1: Alokasi setiap sumber yang tersedia

Sumber	Padi (per kuintal)	Jagung (per kuintal)	Batas sumber	Satuan
Tanah	0,02	0,05	10	hektar
Tenaga	10	8	1550	jam-orang
Pupuk	5	3	460	kilogram
Pendapa-tan	40	30		Ribuan

Catatan:

1. Satuan jam-orang *(man-hour)* adalah banyak orang kali banyak jam bekerja. Kita anggap *(asumsi)* bahwa setiap transmigran memiliki tenaga dan waktu yang relatif sama.
2. Air dianggap berlimpah sehingga tidak menjadi kendala/keterbatasan. Jika ada kendala air maka satuannya adalah banyak jam membuka saluran tersier untuk mengalirkan air ke sawah.
3. Batas ketersediaan dalam soal ini kebetulan semuanya berupa batas atas.

Alternatif Penyelesaian

Besarnya pendapatan kelompok petani dipengaruhi banyak (kuintal) padi dan jagung yang diproduksi. Tentunya, besar pendapatan tersebut merupakan tujuan kelompok tani, tetapi harus mempertimbangkan keterbatasan sumber (luas tanah, tenaga dan pupuk).

Misalkan :

x banyak kuintal padi yang diproduksi oleh kelompok tani

y banyak kuintal jagung yang diproduksi oleh kelompok tani.

Untuk memperoleh pendapatan terbesar, harus dipikirkan keterbatasan-keterbatasan berikut:

a. Banyak hektar tanah yang diperlukan untuk y kuintal padi dan untuk x kuintal jagung tidak boleh melebihi 10 hektar.
b. Untuk y ketersediaan waktu (jam-orang), tiap-tiap padi dan jagung hanya tersedia waktu tidak lebih dari 1550 jam-orang.
c. Jumlah pupuk yang tersedia untuk padi dan jagung tidak lebih dari 460 kilogram.

d. Dengan semua keterbatasan (kendala) (a), (b), dan (c), kelompok tani ingin mengharapkan pendapatan Rp40.000,00 dan Rp30.000,00 untuk setiap kuintal padi dan jagung.

- Dari uraian keterbatasan atau kendala pada bagian (a), (b), dan (c) dan tujuan pada bagian (d), bersama temanmu, coba rumuskan model matematika yang mendeskripsikan kondisi yang dihadapi kelompok tani tersebut.

Melihat uraian di atas, masalah kelompok tani transmigran dapat diubah bentuk menjadi suatu sistem pertidaksamaan linear dua variabel. Pemecahan sistem tersebut dapat dikerjakan dengan metode grafik (dibahas pada subbab berikutnya). Hal ini merupakan pengembangan konsep pertidaksamaan linear satu variabel yang telah kamu pelajari pada Kelas X.

Adapun sistem pertidaksamaan linear yang dimaksud adalah sebagai berikut:

$$\begin{cases} 0,02x + 0,05y \leq 10 \\ 10x + 8y \leq 1550 \\ 5x + 3y \leq 460 \end{cases} \text{ atau } \begin{cases} 2x + 5y \leq 1000 \rightarrow \textit{kendala lahan} \\ 10x + 8y \leq 1550 \rightarrow \textit{kendala waktu} \\ 5x + 3y \leq 460 \rightarrow \textit{kendala pupuk} \end{cases} \quad (1)$$

Karena luas tanah/lahan, banyak waktu, dan banyak pupuk tidak mungkin negatif, kendala ini sebagai kendala nonnegatif, yaitu:

$$\left.\begin{matrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix}\right\} \textit{kendala nonnegatif} \quad (2)$$

Untuk pendapatan, tentu dimaksimumkan dan sebaliknya untuk biaya tentu diminimumkan. Untuk masalah ini, kelompok tani tentu hendak memaksimumkan pendapatan, melalui memperbanyak kuintal padi dan jagung yang dijual berturut-turut Rp 40.000 dan Rp 30.000. Rumusan ini disebut sebagai fungi tujuan/sasaran; sebut Z(x, y).

Secara matematik dituliskan:

Maksimumkan: Z(x, y) = 40x + 30y (dalam satuan ribuan rupiah). (3)

Untuk memecahkan masalah banyak kuintal padi dan jagung yang akan dihasilkan kelompok tani tersebut, akan kita kaji pada subbab garis selidik.

Selain dua variabel, masalah program linear dalam kehidupan sehari-hari banyak juga yang memuat tiga variabel atau lebih. Seperti masalah yang ditemui seorang pengrajin perabot rumah tangga berikut ini.

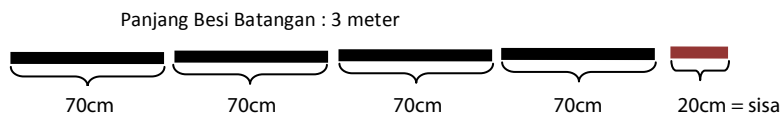
Masalah-1.2

Pak Toni, seorang pengrajin perabot rumah tangga mendapat pesanan membuat rak buku yang kerangkanya terbuat dari besi siku lubang yang dipotong-potong kemudian dirangkai dengan sekrup. Untuk membuat rak itu, diperlukan potongan besi sepanjang 250 cm sebanyak 8 potong, sepanjang 70 cm sebanyak 12 potong, dan sepanjang 37,5 cm sebanyak 20 potong. Ternyata batangan besi siku lubang yang dijual di toko mempunyai panjang standar 3 m, sehingga Pak Toni harus berpikir, cukup berapa potong besi batangan yang akan dibeli dan bagaimana caranya mengatur pemotongannya supaya panjang total sisa pemotongan menjadi minimal (dengan demikian kerugian Pak Toni minimal). Dapatkah kamu membantu Pak Toni untuk memotong besi batangan tersebut?

Alternatif Penyelesaian

Dari persoalan di atas, ada berapa jenis pola potongan besi batangan yang diperlukan Pak Toni? Mari perhatikan gambar berikut ini.

Pola Pemotongan I

Pola Pemotongan II

Gambar 1.1: Pola pemotongan besi

- Dari dua pola di atas, tentunya kamu bisa menampilkan pola yang lain. Temukan pola pemotongan yang lain, kemudian bandingkan hasil teman-temanmu.
- Setelah lengkap, tuliskan pola-pola pemotongan besi tersebut seperti pada tabel berikut ini.

Tabel 1.2: Pola pemotongan besi batangan

		Pola pemotongan ke						
	300	1	2	…	…	…	…	dipesan
Panjang Potongan Kawat	250	1	0	…	…	…	…	8
	70	0	4	…	…	…	…	12
	37,5	1	0	…	…	…	…	20
	sisa	12,5	20	…	…	…	…	

- ➢ Dengan menemukan semua pola pemotongan besi secara lengkap, jelaskan makna setiap pola pemotongan besi tersebut.

Dengan demikian terdapat 6 peubah yang muncul yaitu, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, dengan x_1: banyak batang besi yang dipotong menurut kombinasi pola ke-i. Oleh karena itu, kita temukan rumusan berikut ini:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & \geq 8 \\ 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 \qquad & \geq 12 \\ x_1 + \quad 2x_3 + 4x_4 + 6x_5 + 8x_6 & \geq 20 \end{aligned} \qquad (4)$$

untuk setiap x_1, x_2, x_3, x_4, x_5,dan $x_6 \geq 0$

dengan meminimumkan: $12,5x_1 + 20x_2 + 15x_3 + 10x_4 + 5x_5 + 0x_6$ (5)

Persamaan (5) dapat dinyatakan sebagai suatu fungsi yang tergantung pada nilai x_1, x_2, x_3, x_4, x_5,dan x_6; sebut fungsi

$$Z(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 12,5x_1 + 20x_2 + 15x_3 + 10x_4 + 5x_5 + 0x_6$$

atau

$$Z(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 12,5x_1 + 20x_2 + 15x_3 + 10x_4 + 5x_5$$

merupakan fungsi sisa pemotongan dari semua pola pemotongan besi. Fungsi Z merupakan tujuan pola pemotongan besi batangan yang dibutuhkan Pak Toni. Sedangkan apa yang dinyatakan pada bagian (4) merupakan kendala atau keterbatasan untuk mencapai tujuan tersebut.

Cermati tanda yang digunakan pada bagian (4) di atas, merupakan salah satu karakteristik yang digunakan pada kajian materi program linear.

Masalah-1.3

Suatu perusahaan kertas memiliki dua pusat penggilingan yang harus memasok persediaan tiga pusat percetakan kertas koran secara mingguan. Setiap minggu, Penggilingan I dan II, berturut-turut menghasilkan 350 ton dan 550 ton bubur kertas koran. Sebagai bahan baku, Percetakan I, II, dan III berturut-turut memerlukan 275 ton/minggu, 325 ton/minggu, 300 ton/minggu bubur kertas. Ongkos pengiriman (dalam puluh ribu rupiah/ton) adalah sebagai berikut:

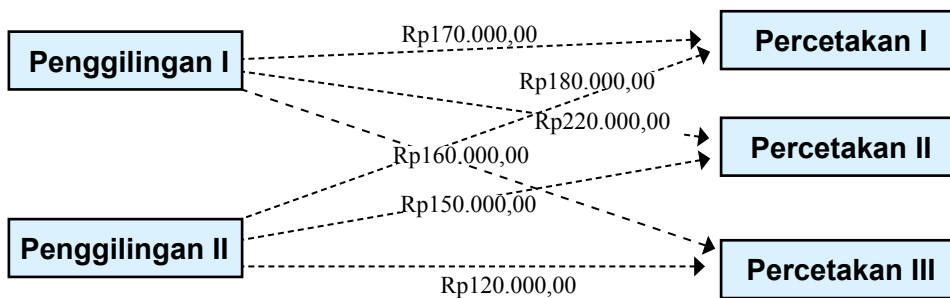
Tabel 1.3: Rincian biaya pengiriman

	Percetakan I	Percetakan II	Percetakan III
Penggilingan I	17	22	15
Penggilingan II	18	16	12

Masalah pada perusahaan tersebut adalah menentukan kapasitas bubur kertas koran setiap pengiriman (ton) ke setiap percetakan agar biaya pengiriman minimal.

Alternatif Penyelesaian

Langkah awal kita untuk menyelesaikan masalah ini adalah dengan merumuskan model matematika masalah pengiriman bubur kertas koran perusahaan tersebut.

Coba perhatikan gambar berikut ini.

Tabel 1.2: Diagram rute pengiriman serta biaya

- Coba kamu sebutkan dan rumuskan kondisi yang terdapat pada persoalan pengangkutan di atas!

Sebagai contoh buat kamu untuk memahaminya, perhatikan rumusan berikut ini.

a) Penggilingan I mampu menghasilkan 350 ton/minggu merupakan pasokan ke Percetakan I, II, dan III. Misalkan x_{ij} : kapasitas pengiriman (ton) setiap minggu dari Penggilingan (i = 1,2) ke Percetakan (j = 1,2,3).
   Jadi dapat dituliskan: $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 350$

➢ Menurut kamu, apa alasan kita menggunakan tanda "=", bukan tanda ≤ atau ≥?

b) Jumlah bahan bubur kertas koran yang diperlukan Percetakan I sebesar 275 ton/minggu harus dipasok oleh Penggilingan I dan II. Kondisi ini dituliskan: $x_{11} + x_{21}$ = 350

Demikian selanjutnya, sehingga kita dapat menyimpulkan secara lengkap sebagai berikut:

Model matematika pasokan bubur kertas koran dari dua Penggilingan ke Percetakan I, II, dan III.

$$\left.\begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 350 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 550 \end{array}\right\} \textit{Model matematika suplai bubur kertas} \qquad (6)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_{11} + x_{21} = 275 \\ x_{12} + x_{22} = 325 \\ x_{13} + x_{23} = 300 \end{array}\right\} \textit{Model matematika permintaan bubur} \qquad (6)$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1,2 \text{ dan } j = 1,2,3$$

Dengan model pengiriman bubur kertas dari dua pusat penggilingan ketiga pusat percetakan menimbulkan biaya pengiriman. Dengan memperhatikan Gambar 1.2, tentu kamu dapat memahami bahwa, setiap minggu, biaya pengiriman setiap ton bubur kertas dari Penggilingan I ke Percetakan II adalah Rp220.000,00, kondisi ini dituliskan: $220.000x_{12}$.

Demikian hal yang sama 170.000 x_{11} memiliki arti bahwa, setiap minggu, biaya pengiriman setiap ton bubur kertas dari Penggilingan I ke Percetakan II adalah Rp 170.000,00.

Secara kumulatif total biaya pengiriman perusahaan tersebut, dituliskan sebagai berikut:

$$Z(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}) = 17x_{11} + 22x_{12} + 15x_{13} + 18x_{21} + 16x_{22} + 12x_{23}$$

(dalam puluh ribu rupiah).

Fungsi Z merupakan fungsi biaya, tentu pihak perusahaan ingin biaya tersebut minimal. Oleh karena itu, untuk kajian program linear, fungsi Z merupakan fungsi tujuan/sasaran, dituliskan:

Meminimumkan:

$$Z(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}) = 17x_{11} + 22x_{12} + 15x_{13} + 18x_{21} + 16x_{22} + 12x_{23}$$

(dalam puluh ribu rupiah).

Fungsi biaya total Z memiliki nilai paling minimal jika ditemukan nilai x_{ij} yang memenuhi semua kondisi batasan pada model permintaan dan suplai bubur bahan kertas koran.

Dari Masalah 1.1, 1.2, dan 1.3, kita belum menyelesaikan masalah secara lengkap. Khususnya untuk menentukan semua nilai variabel yang memenuhi setiap kondisi. Hal ini disebabkan, untuk sebagian masalah diperlukan pengetahuan lebih lanjut agar mampu menyelesaikannya; misalnya pada Masalah 1.1 dan 1.3. Sedangkan untuk Masalah 1.2 akan kita kaji pada subbab berikutnya.

Selain itu, dari Masalah 1.1 dan 1.2, khususnya pada rumusan yang terbentuk pada persamaan (1), (2), (3), (4), (5), (6), dan (7), serta fungsi tujuan yang terbentuk dapat kita simpulkan beberapa ciri model matematika dalam program linear, yaitu:

1) Adanya fungsi tujuan/sasaran dari setiap masalah yang dikaji. Misalnya,
   i. Maksimumkan: $Z(x, y) = 40x + 30y$ (dalam satuan ribuan rupiah).
   ii. Minimumkan:
   $$Z(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 12{,}5x_1 + 20x_2 + 15x_3 + 10x_4 + 5x_5.$$
   iii. Minimumkan:
   $$Z(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}) = 17x_{11} + 22x_{12} + 15x_{13} + 18x_{21} + 16x_{22} + 12x_{23}$$
   (dalam puluh ribu rupiah).
2) Kendala atau keterbatasan utama masalah dinyatakan sebagai suatu sistem pertidaksamaan linear atau sistem persamaan linear.
3) Terdapat juga kendala nonnegatif sebagai syarat dasar nilai setiap variabel yang akan ditentukan.

Dari tiga ciri di atas, dapat kita simpulkan masalah Program Linear dirumuskan sebagai berikut:

Masalah program linear adalah menentukan nilai $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yang memaksimumkan (atau meminimumkan) fungsi sasaran/tujuan,

$$z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n$$

dengan kendala/keterbatasan:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n\ (\leq, =, \geq)\ b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n\ (\leq, =, \geq)\ b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n\ (\leq, =, \geq)\ b_m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0. \end{gathered}$$

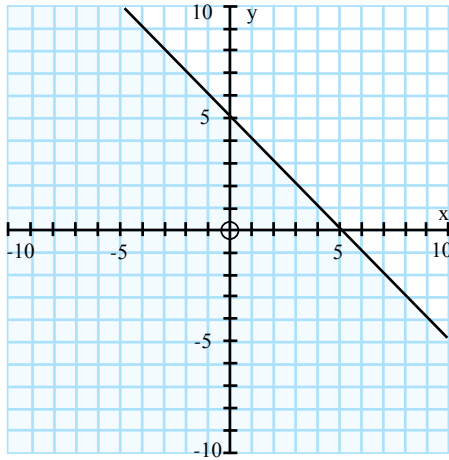
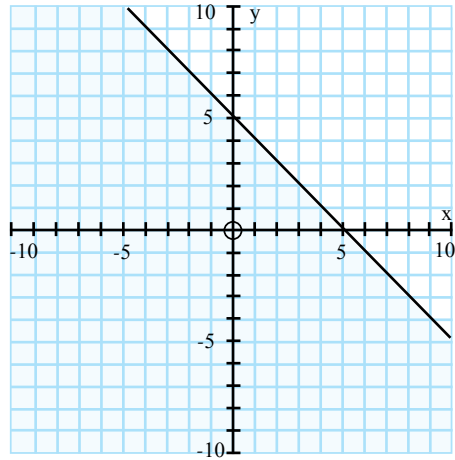
Namun, dalam kajian bab ini kita akan mengkaji masalah program linear hanya untuk dua variabel. Untuk tiga variabel atau lebih dibutuhkan pengetahuan lanjutan tentang teknik menyelesaikan sistem persamaan atau pertidaksamaan linear.

Pembahasan kita selanjutnya, mengkaji grafik setiap kendala yang terbentuk dari masalah program linear.

2. Program Linear dengan Metode Grafik

Kajian masalah program linear dua variabel dapat diselesaikan melalui grafik sistem kendala dari masalah tersebut. Oleh karena itu, langkah awal dalam menyelesaikan masalah tersebut, yaitu dengan menggambarkan sistem pertidaksamaan yang terbentuk pada kendala/keterbatasan masalah program linear. Berikut ini diberikan 1 pertidaksamaan dengan kombinasi syarat variabelnya.

a) $x + y \geq 5$
b) $x + y \geq 5$ dengan $x \geq 0$ dan $y \geq 0$.
c) $x + y \geq 5$ dengan $x \geq 0$ dan $y \leq 0$.
d) $x + y \geq 5$ dengan $x \leq 0$ dan $y \geq 0$.
e) $x + y \geq 5$ dengan $x \leq 0$ dan $y \leq 0$.

➢ Dengan pengetahuan tentang cara menggambarkan daerah penyelesaian suatu pertidaksamaan linear pada Kelas X, coba diskusikan bersama temanmu, apa perbedaan kelima pertidaksamaan di atas.

a). $x + y \geq 5$ b). $x + y \geq 5$ dengan $x \geq 0$ dan $y \geq 0$

Gambar 1.3: Grafik a). $x + y \geq 5$ dan b). $x + y \geq 5$
dengan $x + y \geq 5$ dengan $x \geq 0$ dan $y \geq 0$

Dalam buku ini, untuk semua grafik persamaan linear atau sistem pertidaksamaan linear, ***Daerah Bersih*** *merupakan daerah penyelesaian pertidaksamaan atau sistem pertidaksamaan yang dikaji.*

Pada gambar a), dapat kita pahami bahwa semua titik yang terletak pada daerah yang tidak diarsir (bersih) memenuhi pertidaksamaan $x + y \geq 5$ Hal ini berbeda dengan syarat nilai x dan y pada Gambar 2.3 b). Hanya pada saat $x \geq 0$ dan $y \geq 0$ yang memenuhi daerah penyelesaian pertidaksamaan $x + y \geq 5$.

Apa yang dapat kamu jelaskan dari gambar b) di atas?

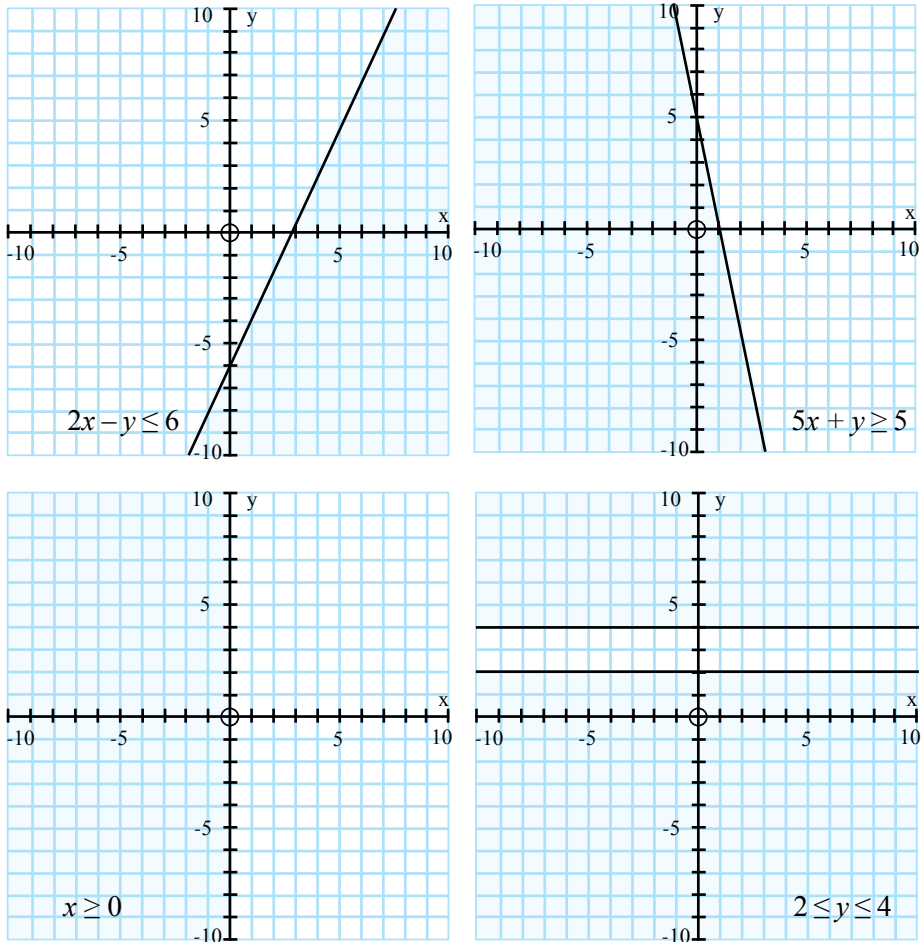
Contoh 1.1

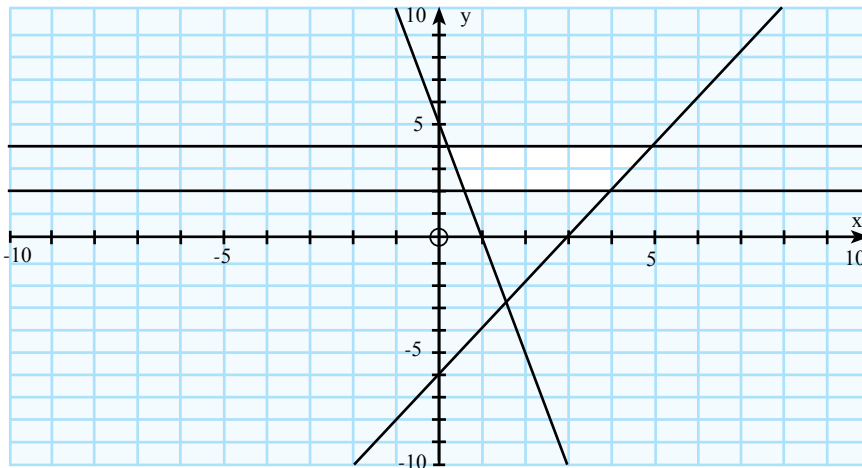
Gambarkan daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan berikut ini.

a) $\left.\begin{array}{r} 2x - y \leq 6 \\ 5x + y \geq 5 \\ x \geq 0 \\ 2 \leq y \leq 4 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y \leq 2 \\ -3x + 2y \geq 6 \\ 3 \leq x \leq 4 \end{array}\right\}$

Alternatif Penyelesaian

Untuk menggambarkan daerah penyelesaian setiap pertidaksamaan pada sistem di atas, dapat dimulai dengan menggambar satu per satu pertidaksamaan yang tersaji. Tentu, semua daerah penyelesaian tersebut nanti harus disajikan dalam satu bidang koordinat kartesius.

Gambar 1.4: Daerah penyelesaian pertidaksamaan

Secara kolektif, disajikan sebagai berikut.

Gambar 1.5: Daerah penyelesaian pertidaksamaan

- Dengan cara yang sama, gambarkan daerah penyelesaian pertidaksamaan secara terpisah, kemudian gambarkan secara lengkap dalam satu bidang koordinat kartesius.
- Dengan dua daerah penyelesaian yang disajikan di atas, diskusikan bersama teman langkah-langkah untuk menggambarkan daerah penyelesaian pertidaksamaan linear. Jika kamu mengalami kesulitan, tanyakanlah kepada gurumu.

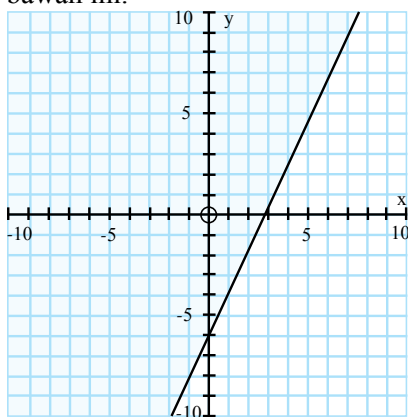
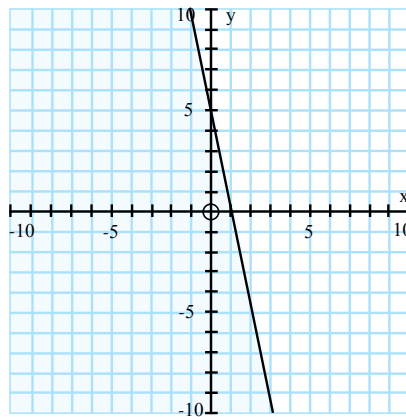
Uji Kompetensi 1.1

1. PT Lasin adalah suatu pengembang perumahan di daerah pemukiman baru. PT tersebut memiliki tanah seluas 12.000 meter persegi berencana akan membangun dua tipe rumah, yaitu tipe mawar dengan luas 130 meter persegi dan tipe melati dengan luas 90 m^2. Jumlah rumah yang akan dibangun tidak lebih 150 unit. Pengembang merancang laba tiap-tiap tipe rumah Rp2.000.000,00 dan Rp 1.500.000,00.
   Modelkan permasalahan di atas!

2. Klinik “Dewi” akan membuka cabang baru di daerah padat penduduk. Untuk itu, pemilik klinik merancang sebuah jadwal jaga perawat yang akan bertugas, seperti berikut ini.

	24.00 - 04.00	04.00 - 08.00	08.00 - 12.00	12.00 - 16.00	16.00 - 20.00	20.00 - 24.00
Ketersedian	1	2	3	4	5	6
Banyak Perawat yang dibutuhkan	6	8	11	9	18	11

Rumuskan masalah penjadwalan perawat tersebut dalam model matematika.

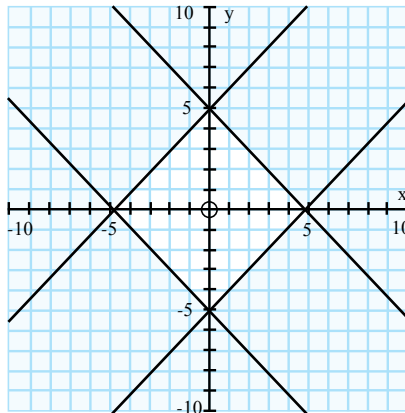
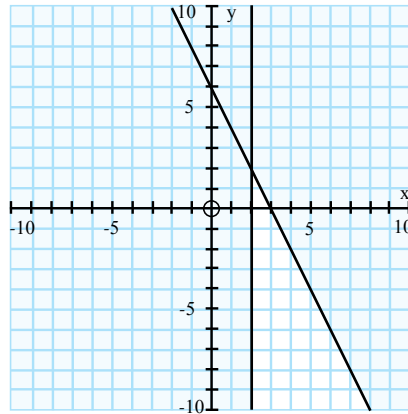
3. Tentukanlah pertidaksamaan yang memenuhi setiap daerah penyelesaian di bawah ini.

(a) (b)

4. Gambarkanlah daerah penyelesaian setiap sistem pertidaksamaan di bawah ini.

$a)\quad \begin{aligned} 2x + y &\geq 24 \\ x &\geq 5 \end{aligned}$

$b)\quad \begin{aligned} 2y &\leq 5 - 6x \\ 1 \leq y &\leq 6 \end{aligned}$

5. Cermati pertidaksamaan $ax + by \geq c$.
Untuk menentukan daerah penyelesaian (bersih) pada bidang koordinat, selain dengan menggunakan uji titik, selidiki hubungan tanda koefisien x dan y terhadap daerah penyelesaian (bersih) pertidaksamaan.

6. Perhatikan grafik-grafik di bawah ini.
   Nyatakan pertidaksamaan-pertidaksamaan yang memenuhi setiap daerah yang memenuhi.

7. Seorang atlet diwajibkan makan dua jenis tablet setiap hari. Tablet pertama mengandung 5 unit vitamin A dan 3 unit vitamin B, sedangkan tablet kedua mengandung 10 unit vitamin A dan 1 unit vitamin B. Dalam satu hari, atlet itu memerlukan 20 unit vitamin A dan 5 unit vitamin B. Harga tiap-tiap 1 tablet, Rp1.500,00 dan Rp2.000,00.
   Modelkan masalah di atas.
8. Dengan persediaan kain polos 20 meter dan kain bergaris 10 meter, seorang penjahit akan membuat 2 model pakaian jadi. Model I memerlukan 1 meter kain polos dan 1,5 meter kain bergaris. Model II memerlukan 2 meter kain polos dan 0.5 meter kain bergaris. Bila pakaian tersebut dijual, setiap model I memperoleh untung Rp15.000,00 dan model II memperoleh untung Rp10.000,00. (UAN 2004 No. 22)
   Nyatakan masalah di atas dalam model matematika

9. Sebuah toko bunga menjual 2 macam rangkaian bunga. Rangkaian I memerlukan 10 tangkai bunga mawar dan 15 tangkai bunga anyelir, Rangkaian II memerlukan 20 tankai bunga mawar dan 5 tangkai bunga anyelir. Persediaan bunga mawar

dan bunga anyelir masing-masing 200 tangkai dan 100 tangkai. Rangkaian I dijual seharga Rp200.000,00, dan Rangkaian II dijual seharga Rp100.000,00 per rangkaian. (UN 2006 No. 21)
Modelkan masalah di atas dalam bentuk model matematika.

10. Perhatikan masalah yang dihadapi seorang penjaja buah-buahan berikuti ini.
    Pak Benni, seorang penjaja buah-buahan yang menggunakan gerobak menjual apel dan pisang. Harga pembelian apel Rp 18.000,- tiap kilogram dan pisang Rp8.000,00,- tiap kilogram. Beliau hanya memiliki modal Rp2.000.000,00, sedangkan muatan gerobak tidak lebih dari 450 kilogram. Padahal keuntungan tiap kilogram apel 2 kali keuntungan tiap kilogram pisang.
    Rumuskanlah model matematika masalah di atas.

3. Daerah Bersih dan Garis Selidik

Penggunaan istilah daerah bersih merupakan daerah yang memenuhi suatu pertidaksamaan. Untuk konsistensi pada buku ini, kita menggunakan istilah daerah bersih, artinya semua titik (x, y) yang memenuhi suatu pertidaksamaan linear atau suatu sistem pertidaksamaan linear.

Sekarang, yang menjadi pokok permasalahan pada bagian subbab ini adalah menentukan daerah bersih suatu pertidaksamaan linear atau sistem pertidaksamaan linear. Mari kita mulai daerah bersih yang terdapat pada Gambar 1.3 b). Untuk setiap nilai x dan y yang memenuhi $x + y \geq 5$ dengan $x \geq 0$ dan $y \geq 0$, disajikan pada tabel berikut ini.

- Temukan hubungan titik koordinat dengan daerah bersih yang terdapat pada Gambar 1.3.b! Apa kesimpulan yang dapat ditarik dari hubungan tersebut?

Tabel 1.4: Uji Titik dengan Nilai pertidaksamaan dan Arah Daerah Bersih

(x, y)	Nilai $x + y \geq 5$	Arah Daerah Bersih
(5, 4)	Benar (9 > 5)	Sebelah kanan (atas) garis $x + y = 5$
(6, 1)	Benar (7 > 5)	Sebelah kanan (atas) garis $x + y = 5$
(2, 1)	Salah (3 > 5)	Sebelah kiri (bawah) garis $x + y = 5$
(0, 0)	Salah (0 > 5)	Sebelah kiri (bawah) garis $x + y = 5$

Sekarang, kita uji pemahaman kita menggambarkan daerah bersih yang dihasilkan masalah berikut ini.

Masalah-1.4

Suatu pabrik farmasi menghasilkan dua jenis kapsul obat flu yang diberi nama Fluin dan Fluon. Tiap-tiap kapsul memuat tiga unsur (*ingredient*) utama dengan kadar kandungannya tertera dalam Tabel 1.5. Menurut dokter, seseorang yang sakit flu akan sembuh jika dalam tiga hari (secara rata-rata) minimal menelan 12 grain aspirin, 74 grain bikarbonat dan 24 grain kodein. Jika harga Fluin Rp500,00 dan Fluon Rp600,00 per kapsul, bagaimana rencana (program) pembelian seorang pasien flu (artinya berapa kapsul Fluin dan berapa kapsul Fluon harus dibeli) supaya cukup untuk menyembuhkannya dan meminimumkan ongkos pembelian total.

Table 1.5: Kandungan Unsur (dalam grain)

Unsur	Banyak grain perkapsul	
	Fluin	Fluon
Aspirin	2	1
Bikorbonat	5	8
Kodein	1	6

Alternatif Penyelesaian

Data pada masalah di atas, dapat disajikan seperti tabel berikut ini.

Tabel 1.6: Tabel persiapan

Unsur			Batas Minimum
	Fluin	Fluon	
Aspirin	2	1	12
Bikarbonat	5	6	74
Kodein	1	6	24
Harga	500	600	

Dengan tabel tersebut, dapat kita misalkan:

x : banyak kapsul Fluin yang dibeli.

y : banyak kapsul Fluon yang dibeli.

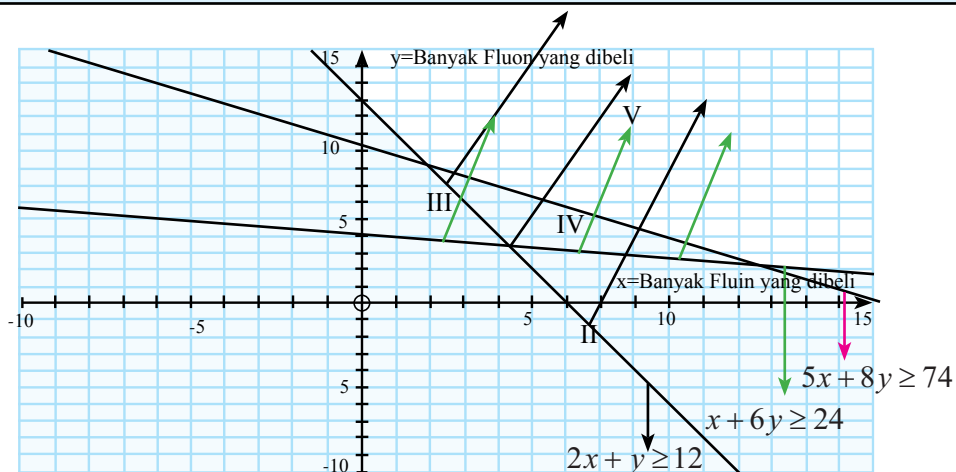
Selanjutnya, kita dengan mudah menemukan bentuk masalah program linear masalah di atas.

Mencari x, y yang memenuhi:

$$\begin{cases} 2x + y \geq 12 \\ 5x + 8y \geq 74 \\ x + 6y \geq 24 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \text{(a)}$$

dan meminimumkan $Z = 500x + 600y$. (b)

➢ Dengan menggunakan uji titik, coba kamu gambarkan daerah penyelesaian setiap pertidaksamaan di atas.

software Autograph merupakan salah satu software yang digunakan unttuk menggambarkan daerah penyelesaian suatu sistem pertidaksamaan linear. *Autograph* juga dapat digunakan untuk menggambarkan berbagai grafik fungsi, misalnya fungsi kuadrat, dan fungsi logaritma.

Gambar 1.4: Daerah V adalah irisan daerah bersih sistem pertidaksamaan (a)

Daerah no. V merupakan irisan daerah bersih keenam pertidaksamaan, juga disebut ***daerah layak, atau daerah penyelesaian atau daerah optimum***.

Dalam buku ini kita sepakati untuk menggunakan istilah daerah penyelesaian. Jika keenam pertidaksamaan di atas, dinyatakan sebagai suatu sistem pertidaksamaan, maka daerah penyelesaian dapat kita definisikan sebagai berikut:

Definisi 1.2

(Daerah Layak/Daerah Penyelesaian/Daerah Optimum)

Daerah fisibel atau Daerah Penyelesaian Masalah Program Linear merupakan himpunan semua titik (x, y) yang memenuhi kendala suatu masalah program linear.

- Coba diskusikan dengan temanmu, apakah semua kendala suatu masalah program linear memiliki daerah penyelesaian? Jika ya, tunjukkan syaratnya. Jika tidak, berikan contohnya! (Petunjuk: tunjukkan untuk program linear 2 variabel)

Daerah penyelesaian untuk masalah ini merupakan suatu daerah yang tak terbatas (*unbounded*). Tentu terdapat juga daerah penyelesaian yang terbatas (*bounded*).

Selanjutnya, akan ditentukan nilai x dan y yang terdapat di daerah penyelesaian yang menjadikan nilai fungsi $Z = 500x + 600y$ minimum. Jadi, kita akan fokus pada nilai fungsi Z di daerah penyelesaian. Perhatikan nilai-nilai fungsi Z pada tabel berikut ini.

Tabel 1.7: Tabel nilai $Z = 500x + 600y$

(x, y)	Nilai $Z = 500x + 600y$
(0, 12)	$Z = 500.(0) + 600.(12) = 7200$
(2, 8)	$Z = 500.(2) + 600.(8) = 5800$
(4, 7)	$Z = 500.(4) + 600.(7) = 6200$
(5, 10)	$Z = 500.(5) + 600.(10) = 8500$

Kegiatan 1

- Dengan nilai fungsi Z pada tabel di atas, gambarkan beberapa grafik persamaan garis $K = 500x + 600y$ dengan *k bilangan bulat* (sesuai dengan nilai (x,y)), yang melalui daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan (a).

- Cermati perubahan nilai garis tersebut, jika garis digeser ke kanan (atas) atau ke kiri (bawah), hingga ditemukan nilai paling minimum di daerah penyelesaian.

Dari hasil Kegiatan 1, ditemukan bahwa pada saat $x = 6$ dan $y = 3$ fungsi sasaran $K = 500x + 600y$ bernilai minimum, yaitu 4800.

Sebagai pembanding, bahwa daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan (a) merupakan daerah tidak terbatas (*unbounded area*).

- Coba cermati nilai fungsi $Z = 500x + 600y$ untuk titik A, B, dan C.

Tabel 1.8: Nilai $Z = 500x + 600y$

	$Z = 500x + 600y$
A (0,12)	Z = 500.(0) + 600.(12) = 7.200
B (2,8)	Z = ……
C (6,3)	Z = ……

- Kesimpulan apa yang dapat kamu tarik dengan nilai Z yang ada pada tabel di atas?
- Seandainya, fungsi tujuan masalah tersebut diubah menjadi:
  Maksimumkan: $Z = 500x + 600y$
  Berapa nilai maksimum Z yang kamu peroleh?

Dari hasil penyelidikan melalui Tabel 1.8, diharapkan kamu menemukan supaya uang pembelian total menjadi minimum sebaiknya dibeli 6 kapsul Fluin dan 3 kapsul Fluon dan uang pembeliannya adalah Rp4800,00.

Untuk memperkaya pengetahuan dan ketrampilan kamu, mari kita selesaikan masalah kelompok tani transmigran yang disajikan pada awal bab ini.

Contoh 1.2

Telah diketahui model matematika masalah tersebut, yaitu

$$\begin{cases} 0,02x + 0,05y \le 10 \\ 10x + 8y \le 1550 \\ 5x + 3y \le 460 \end{cases} \text{ atau } \begin{cases} 2x + 5y \le 1000 \rightarrow \textit{kendala lahan} \\ 10x + 8y \le 1550 \rightarrow \textit{kendala waktu} \\ 5x + 3y \le 460 \rightarrow \textit{kendala pupuk} \end{cases} \quad (1)$$

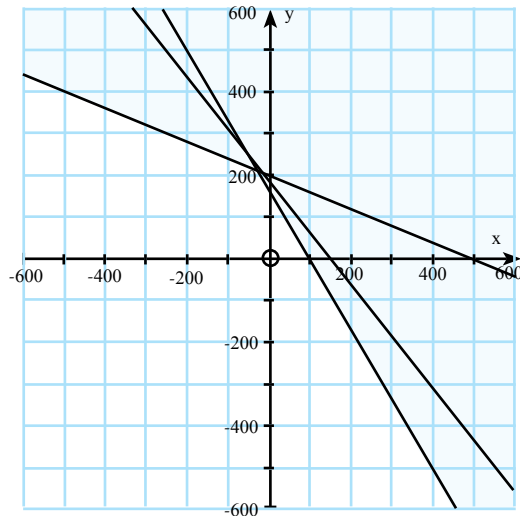
$$\left. \begin{array}{l} x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array} \right\}$$

Fungi Tujuan

Maksimumkan: $Z(x, y) = 40x + 30y$ (dalam satuan ribuan rupiah). (2)

Kita akan menentukan banyak hektar tanah yang seharusnya ditanami pada dan jagung agar pendapatan kelompok tani tersebut maksimum.

Alternatif Penyelesaian

Langkah pertama, kita menentukan daerah penyelesaian yang memenuhi sistem (1). Mari cermati gambar di bawah ini.

Gambar 1.5: Daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan (1).

- Untuk memastikan ketrampilanmu dalam menggambarkan daerah penyelesaian suatu sistem pertidaksamaan linear, selidiki Gambar 1.5 apakah sudah sesuai dengan batasan (1)? Berikan alasanmu.

Selanjutnya kita akan memilih dua titik yang terdapat di daerah penyelesaian untuk membantu menentukan arah pergeseran garis selidik $K = 40x + 30y$ (dalam ribuan rupiah).

Misal, dipilih titik (20,20), sehingga diperoleh persamaan garis $40x + 30y = 1400$. Sedangkan untuk titik (50, 100), diperoleh persamaan garis $40x + 30y = 5000$.

- Dengan teliti, selidiki arah persegeran nilai grafik garis selidik pada daerah penyelesian hingga kamu menemukan titik yang mengakibatkan garis tersebut bernilai maksimum. Bandingkan hasil kerjamu dengan hasil kinerja temanmu!

- Dari hasil yang kamu peroleh, interpretasikan pada konteks masalah yang sebenarnya.

Dari pembahasan Masalah 1.1 dan Masalah 1.4, mari kita tuliskan dan cermati bersama kesimpulan berikut ini, yang kita nyatakan dalam definisi.

Definisi 1.3

Fungsi sasaran/tujuan merupakan atau fungsi objektif suatu rumusan fungsi yang memenuhi semua keterbatasan pada suatu masalah program linear.

Fungsi sasaran/tujuan merupakan fungsi linear yang terkait dengan setiap nilai variabel dalam semua kendala program linear.

Mari kita cermati kembali fungsi sasaran untuk setiap Masalah 1.1 sampai Masalah 1.4.

i Maksimumkan: $Z(x, y) = 40x + 30y$ (dalam satuan ribuan rupiah).

ii Minimumkan:

$$Z(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 12,5x_1 + 20x_2 + 15x_3 + 10x_4 + 5x_5.$$

ii Minimumkan:

$$Z(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}) = 17x_{11} + 22x_{12} + 15x_{13} + 18x_{21} + 16x_{22} + 12x_{23}.$$

(dalam puluh ribu rupiah).

iv Minimumkan: $Z(x, y) = 500x + 600y$

Fungsi sasaran bagian (i) dan (iv) hanya memuat dua variabel, yaitu variabel x dan y, sedangkan pada bagian (ii) dan (iii) memuat enam variabel. Bahkan, terdapat masalah yang memuat n banyak variabel.

Oleh karena itu, secara umum dapat ditulis bentuk umum fungsi sasaran dari suatu masalah program linear, yaitu:

Maksimumkan (Minimumkan)

$Z(x_1, x_2, ...,x_n) = C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_nx_n.$

Nilai maksimum (atau minimum) fungsi Z adalah nilai terbesar (atau terkecil) dari fungsi objektif yang merupakan solusi optimum masalah program linear.

Namun dalam kesempatan ini, kita mengkaji hanya untuk $n = 2$ melibatkan, sehingga fungsi sasaran menjadi $Z(x_1, x_2) = C_1x_1 + C_2x_2$.

- Selidiki syarat suatu fungsi tujuan mempunyai (tidak mempunyai) nilai maksimum!

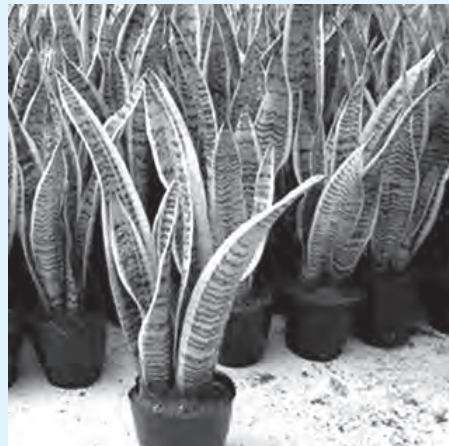
Definisi 1.4

Garis selidik adalah grafik persamaan fungsi sasaran/tujuan yang digunakan untuk menentukan solusi optimum (maksimum atau minimum) suatu masalah program linear.

Untuk menentukan persamaan garis selidik $K = C_1x_1 + C_2x_2$ dengan k bilangan real, kita memilih minimal dua titik (x, y) yang terdapat di daerah penyelesaian. Dengan dua titik tersebut, nilai optimum fungsi sasaran dapat ditemukan melalui pergeseran garis selidik di daerah penyelesaian.

Namun pada kasus tertentu, garis selidik tidak dapat digunakan untuk menentukan nilai optimum suatu fungsi sasaran. Mari kita cermati masalah berikut ini.

Masalah-1.5

Apakah kamu pernah melihat tanaman hias seperti di bawah ini? Tahukah kamu berapa harga satu tanaman hias tersebut?

Gambar 1.6: Tanaman Hias Aglaonema dan Sansevieria

Sumber: *www.aksesdunia.com*

Setiap enam bulan, seorang pemilik usaha tanaman hias memesan tanaman hias dari agen besar; Aglaonema (A) dan Sansevieria (S) yang berturut-turut memberi laba sebesar Rp5.000.000,00 dan Rp3.500.000,00 per unit yang terjual. Dibutuhkan waktu yang cukup lama untuk menghasilkan satu tanaman hias dengan kualitas super. Oleh karena itu agen besar memiliki aturan bahwa setiap pemesanan tanaman hias A paling sedikit 20% dari seluruh pesanan tanaman hias lain. Pemilik usaha tanaman hias memiliki lahan yang hanya cukup untuk 10 tanaman hias A saja atau 15 tanaman hias S. Dalam keadaan demikian, berapa banyak tanaman hias A dan S sebaiknya dipesan (per semester) jika diketahui bahwa pada akhir semester tanaman hias lama pasti habis terjual dan pemilik usaha tersebut ingin memaksimumkan laba total?

Alternatif Penyelesaian

Untuk memudahkan kita dalam membahas masalah ini,

misalkan x : banyak tanaman hias A yang dipesan

y : banyak tanaman hias S yang dipesan.

Pernyataan "Oleh karena itu agen besar memiliki aturan bahwa setiap pemesanan tanaman hias A paling sedikit 20% dari seluruh pesanan tanaman hias lain", dapat dituliskan sebagai berikut.

$$x \geq \frac{1}{5}(x+y) \text{ atau } 4x - y \geq 0.$$

Untuk memperoleh laba, pemilik harus mempertimbangan keterbatasan lahan sebagai daya tampung untuk tiap-tiap tanaman hias.

Misal, L : luas kebun tanaman hias,

L_x : luas kebun yang diperlukan untuk 1 tanaman hias A,

L_y : luas kebun yang diperlukan untuk 1 tanaman hias S.

Sesuai keterangan pada masalah di atas, luas kebun hanya dapat menampung 10 tanaman hias A atau 15 tanaman hias S. Pernyataan ini, dimodelkan sebagai berikut:

$$L_x = \frac{1}{10}L \text{ dan } L_y = \frac{1}{15}L$$

Tentu luas kebun yang diperlukan untuk x banyak tananam hias A dan y banyak tanaman hias S tidak melebihi luas kebun yang ada. Oleh karena itu, dapat dituliskan;

$$x.\left(\frac{1}{10}L\right) + y.\left(\frac{1}{15}L\right) \leq L \text{ atau } 3x + 2y \leq 30$$

Selanjutnya, pemilik kebun mengharapkan laba sebesar Rp5.000.000,00 dari 1 tanaman hias A yang terjual dan Rp3.500.000,00 dari 1 tanaman hias S yang terjual. Oleh karena itu, untuk sebanyak x tanaman hias A yang terjual dan sebanyak y tanaman hias S yang terjual, dapat dituliskan sebagai laba total pemilik kebun; yaitu:

$Z = 5x + 3.5y$ (dalam juta rupiah).

Jadi secara lengkap, model matematika masalah program linear pemilik kebun tanaman hias dinyatakan sebagai berikut.

Menentukan x dan y yang memenuhi kendala:

$$\begin{cases} 4x - y \geq 0 \\ 3x + 2y \leq 30 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

Dengan fungsi tujuan:

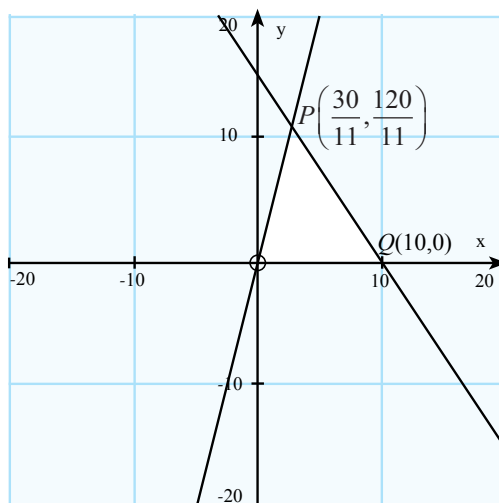
Maksimumkan: $Z = 5x + 3.5y$ (dalam juta rupiah).

Selanjutnya, kita akan menentukan daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan linear (1). Tentunya, diharapkan keterampilan kamu dalam menggambarkan daerah penyelesaian sistem tersebut sudah makin meningkat. Sekaligus juga, kamu harus makin terampil dalam memilih titik dalam daerah penyelesaian untuk menentukan nilai maksimum fungsi sasaran.

Mari kita cermati gambar berikut ini.

- Dengan menemukan persamaan garis selidik terlebih dahulu, periksa bahwa titik

$P\left(\frac{30}{11},\frac{120}{11}\right)$ merupakan titik optimum masalah program linear tersebut.

Dengan nilai maksimum Z = 51.818.181,818 atau sekitar Rp51.818.200,00. Bandingkan hasil kerjamu dengan temanmu.

Gambar 1.7: Daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan (1)

Namun, pada kenyataannya, ditemukannya titik $P\left(\frac{30}{11},\frac{120}{11}\right)$ sebagai titik optimum masalah di atas mengakibatkan hal yang tidak mungkin terjadi untuk menemukan $2\frac{8}{11}$ tanaman hias A dan $10\frac{10}{11}$ tanaman hias S. Cara yang mungkin diterapkan adalah dengan metode pembulatan.

Mari kita cermati hasil pembulatan (ke atas atau ke bawah)

titik $P\left(2\frac{8}{11},10\frac{10}{11}\right)$

i P_1 (2,10) : ternyata di luar daerah penyelesaian *OPQ*.

ii P_2 (2,11) : ternyata di luar daerah penyelesaian *OPQ*.

iii P_3 (3,10) : merupakan titik di daerah penyelesaian, tetapi nilai Z pada titik (3, 10) hanya sebesar Rp50.000.000,00, memiliki selisih sebesar Rp1.800.000,00 dengan nilai optimum di titik *P*.

iv P_4 (3,11) : ternyata di luar daerah penyelesaian *OPQ*.

Artinya, metode pembulatan (ke atas atau ke bawah) juga tidak memberikan jawaban optimum terhadap masalah program linear tersebut.

- Dalam kertas berpetak, di dalam daerah penyelesaian cermati titik-titik yang dekat dengan titik $P\left(2\frac{8}{11},10\frac{10}{11}\right)$. Tetapi titik yang kita inginkan, yaitu (x, y) harus untuk x dan y merupakan bilangan bulat.

Sebagai petunjuk buat kamu, nilai optimum fungsi sasaran adalah Rp51.500.000,00.

- Untuk kesimpulan, dari hasil titik optimum yang kamu peroleh, intrepetasikan nilai yang kamu peroleh.

Masalah 1.5 mengingatkan kita bahwa tidak selamanya penentuan nilai optimum dengan menggunakan garis selidik. Terdapat beberapa kasus yang memerlukan ketelitian yang tinggi dalam menyelesaikan masalah program linear.

Dari beberapa masalah yang telah dibahas di atas, masalah program linear memiliki nilai optimum (maksimum atau minimum) terkait dengan eksistensi daerah penyelesaian. Oleh karena itu terdapat tiga kondisi yang akan kita selidiki, yaitu:

1. tidak memiliki daerah penyelesaian
2. memiliki daerah penyelesaian (fungsi sasaran hanya memiliki nilai maksimum atau hanya memiliki nilai minimum)
3. memiliki daerah penyelesaian (fungsi sasaran memiliki nilai maksimum dan minimum).

1. Tidak memiliki daerah penyelesaian

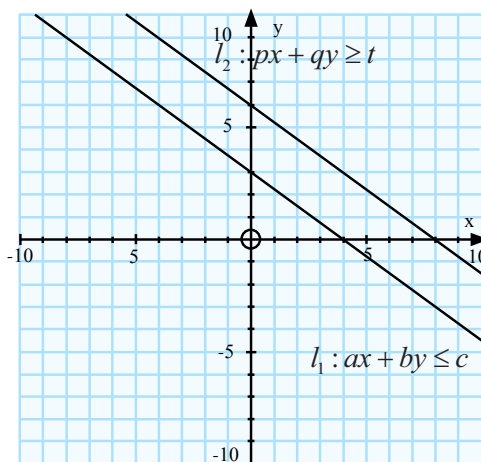
Mari kita cermati, grafik berikut ini.

Diberikan sistem:

$$\begin{cases} ax+by\le c;\ a\ne 0,\ \ b\ne 0 \\ px+qy\ge t; p\ne 0,\ \ q\ne 0 \end{cases}$$

Untuk setiap

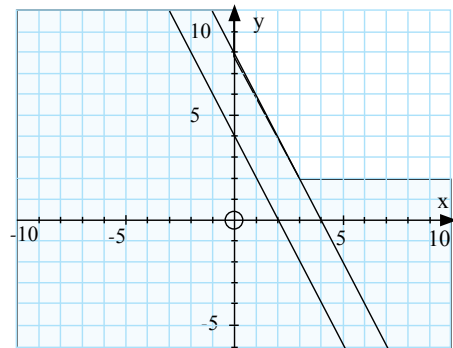
a, b, c, p, q dan $t \in R$

- Selidiki hubungan antar koefisien variabel (x dan y) serta konstanta c dan t pada sistem tersebut, hingga kamu menemukan syarat bahwa suatu sistem pertidaksamaan linear tidak memiliki daerah penyelesaian.

Gambar 1.8

2. Memiliki daerah penyelesaian (fungsi sasaran hanya memiliki nilai maksimum atau hanya memiliki nilai minimum).

Grafik berikut ini, mendeskripsikan bahwa walaupun kendala suatu program linear memiliki daerah penyelesaian, ternyata belum tentu memiliki nilai fungsi sasaran. Mari kita cermati.

Gambar 1.9

- Dari Gambar 1.9, tentukan sistem pertidaksamaan yang bersesuaian dengan grafik daerah penyelesaian seperti pada gambar.

Selanjutnya, dengan sistem pertidaksamaan yang telah kamu temukan, misalnya diketahui fungsi sasaran;

a. Maksimumkan:

$Z = mx + ny; \quad m, n \in R^+$

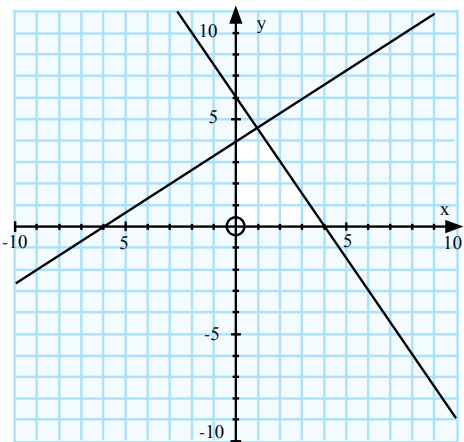
b. Minimumkan: $Z = mx + ny; \quad m, n \in R^+$

- Dengan demikian, tentu kamu dapat menemukan kondisi suatu program linear yang memiliki daerah penyelesaian tetapi fungsi sasarannya hanya memiliki nilai maksimum dan tidak memiliki nilai minimum.

3. Memiliki daerah penyelesaian (fungsi sasaran memiliki nilai maksimum dan minimum).

Pertidaksamaan:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 12 \geq 0 \\ 3x + 2y - 12 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

merupakan kendala yang bersesuaian dengan grafik daerah penyelesaian pada Gambar 1.10 di samping.

Gambar 1.10

- Misalnya, diberikan fungsi sasaran berikut ini:

a) Maksimumkan:

$Z = 3x + 2y$

b) Minimumkan:

$Z = 3x + 2y$.

Dengan teliti, coba kamu tentukan nilai maksimum dan minimum fungsi sasaran tersebut. Bandingkan hasil yang kamu temukan dengan temanmu.

Latihan

Diketahui sistem pertidaksamaan linear suatu masalah program linear.

$$\begin{cases} ax + by(\geq,\leq)c; a \neq 0, b \neq 0 & (1) \\ px + qy(\geq,\leq)t; p \neq 0, q \neq 0 & (2) \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

a, b, c, p, q dan t merupakan bilangan real, dan $c < t$.

Dengan memperhatikan hubungan koefisien variabel (x dan y) pada kendala (1) dan (2), selidiki syarat agar sistem pertidaksamaan linear tersebut:

- i tidak memiliki daerah penyelesaian;
- ii memiliki daerah penyelesaian
- iii memiliki daerah penyelesaian berupa suatu garis atau segmen garis
- iv memiliki daerah penyelesaian hanya satu titik.

Uji Kompetensi 1.2

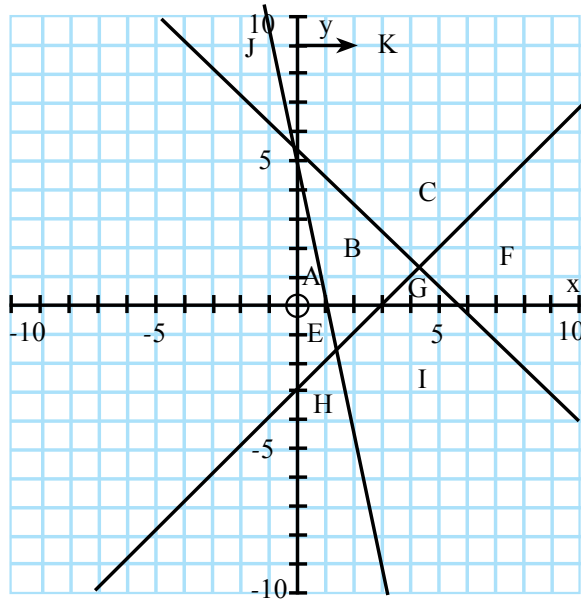
1. Sebuah perusahaan akan membeli paling sedikit 8 mesin untuk perluasan pabriknya. Harga mesin baru Rp15.000.000,00 per unit. Selain itu dapat juga dibeli mesin bekas dengan umur dua tahun, tiga tahun, dan empat tahun yang harganya diukur dari harga baru akan susut Rp3.000.000,00 per tahunnya. Keempat jenis mesin di atas, yaitu baru, umur dua tahun, umur tiga tahun, umur empat tahun mempunyai ukuran yang berbeda-beda, berturut-turut memerlukan tempat 3 meter persegi, 4 meter persegi, 5 meter persegi, dan 6 meter persegi per unitnya. Sedangkan ongkos perawatannya berturut-turut 0, Rp1.000.000,00, Rp2.000.000,00, dan Rp4.000.000,00 per tahunnya. Bila tempat yang tersedia untuk semua mesin yang dibeli tersebut hanya 35 meter persegi dan ongkos

perawatan total yang disediakan hanya Rp7.000.000,00 per tahun, bentuk model matematika masalah program linear perusahaan tersebut.

2. Alkohol dapat dihasilkan dari 3 macam buah-buahan, A, P dan V yang dapat diolah dengan 2 macam proses, misalnya A_1: buah A diolah menurut cara -1, dan A_2 : buah A diolah dengan cara-2, dan seterusnya. Berturut-turut A_1, A_2, P_1, P_2, V_1, V_2 dapat menghasilkan alkohol sebanyak 3%; 2,5%; 3,5%; 4%; 5%; dan 4,5% dari buah sebelumnya. Kapasitas mesin adalah 1 ton buah-buahan per hari dan selalu dipenuhi. Pemborong yang memasok buah A hanya mau melayani jika paling sedikit 600 kilogram per hari. Sebaliknya buah P dan V masing-masing hanya dapat diperoleh paling banyak 450 kilogram per hari.
   Buatlah model matematika masalah di atas!

3. Untuk melayani konferensi selama 3 hari harus disediakan serbet makanan. Untuk hari ke-1, -2, -3 berturut-turut diperlukan 50, 80, 70 helai serbet makanan. Harga beli yang baru Rp 1.200 sehelai, ongkos mencucikan kilat (satu malam selesai) Rp 800 per helai, cucian biasa (satu hari satu malam selesai) Rp 200 per helai. Untuk meminimumkan biaya pengadaan serbet, berapa helai serbet yang harus dibeli, berapa helai serbet bekas hari ke-1 harus dicuci kilat (untuk hari ke-2) dan berapa helai serbet bekas hari ke-2 harus dicuci kilat (untuk hari ke-3)?
   Buatlah model matematika masalah di atas!

4. Sebuah peternakan unggas mempunyai kandang-kandang untuk 600 ekor yang terdiri dari ayam (A), itik (I), dan mentok (M). Kapasitas maksimum kandang selalu dipenuhi. Pemilik menginginkan banyak itik tidak melebihi 400 ekor, demikian pula mentok paling banyak 300 ekor. Ongkos pemeliharaan sampai laku terjual untuk A, I, M berturut-turut 3500, 2500, dan 6000 rupiah per ekor. Harga jual A, I, M, berturut-turut adalah 7.000, 5.500 dan 10.500 rupiah per ekornya. Rumuskan model matematika program beternak yang memaksimumkan keuntungan jika keuntungan adalah selisih harga jual dari ongkos pemeliharaan. (Dalam masalah di atas dianggap tidak ada ongkos pembelian).

5. Perhatikan gambar di bawah ini.

Tentukan sistem pertidaksamaan yang memenuhi jika setiap label daerah merupakan daerah penyelesaian.

6. Tentukanlah suatu sistem pertidaksamaan yang memenuhi setiap daerah penyelesaian penyelesaian berikut ini.
   a) berbentuk segitiga sama sisi di kuadran pertama
   b) berbentuk trapesium di kuadran kedua
   c) berbentuk jajaran genjang di kuadran keempat

7. Gambarkan daerah penyelesaian untuk setiap kendala masalah program linear berikut ini.
   a) $x-4y \leq 0$; $x-y \leq 2$; $-2x+3y \leq 6$; $x \leq 10$
   b) $x+4y \leq 30$; $-5x+y \leq 5$; $6x-y \geq 0$; $5x+y \leq 50$; $x-5y \leq 0$
   c) $x+4y \leq 30$; $-5x+y \leq 5$; $6x-y \geq 0$; $5x+y \leq 50$; $x-5y \leq 0$

8. Pesawat penumpang mempunyai tempat duduk 48 kursi. Setiap penumpang kelas utama boleh membawa bagasi maksimum 60 kilogram sedangkan kelas ekonomi maksimum 20 kg. Pesawat hanya dapat membawa bagasi maksimum 1440 kg. Harga tiket kelas utama Rp150.000,00 dan kelas ekonomi Rp100.000,00. Supaya pendapatan dari penjualan tiket pada saat pesawat penuh mencapai maksimum, tentukan jumlah tempat duduk kelas utama. (UMPTN Tahun 2000 Rayon A).

9. Seorang agen perusahaan alat elektronik rumah tangga menjual kulkas ke suatu pusat perbelanjaan. Pada bulan Juli, 25 unit kulkas terjual. Untuk tiga bulan berikutnya, setiap agen membeli 65 kulkas per bulan dari pabrik, dan mampu menjual hingga 100 unit per bulan dengan rincian harga sebagai berikut:

Kulkas	Harga Beli ($)	Harga Jual ($)
Agustus	60	90
September	65	110
Oktober	68	105

   Agen menyimpan 45 unit kulkas tetapi harus membayar $7/unit/bulan dan akan dijual pada bulan berikutnya. Tentukan nilai optimum pembelian, penjualan dan biaya penyimpanan kulkas tersebut.

10. Perhatikan masalah program linear berikut ini:
    a) Tentukan nilai minimum dari $3x + 4y$ dengan kendala:
       $x \geq 1; y \geq 2; x + y \leq 6,$ dan $2x + 3y \leq 15$
    b) Tentukan interval nilai $Z(x, y) = y - 2x + 2$ dengan kendala:
       $x \geq 0; y \geq 0;\ 2x + 5y \leq 10,$ dan $4x + 3y \leq 12$

11. Tentukan titik yang mengakibatkan fungsi linear $f(x, y) = 2x - y - 4$ bernilai optimum (maksimum atau minimum) jika daerah asal dibatasi sebagai berikut $-1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1$. (Periksa nilai fungsi di beberapa titik daerah asal dan periksa bahwa nilai optimum tercapai pada suatu titik sudut daerah asal).

Projek

Setiap manusia memiliki keterbatasan akan tenaga, waktu, dan tempat. Misalnya, dalam aktivitas belajar yang kamu lakukan setiap hari tentu kamu memiliki keterbatasan dengan waktu belajar di rumah, serta waktu yang kamu perlukan untuk membantu orang tuamu. Di sisi lain, kamu juga membutuhkan waktu yang cukup untuk istirahat setelah kamu melalukan aktivitas belajar dan aktivitas membantu orang tua.
Dengan kondisi tersebut, rumuskan model matematika untuk masalah waktu yang kamu perlukan setiap hari, hingga kamu dapat mengetahui waktu istirahat yang peroleh setiap hari (minggu).

Selesaikan proyek di atas dalam waktu satu minggu.
Susun hasil kinerja dalam suatu laporan, sehingga kamu, temanmu dan gurumu dapat memahami dengan jelas.

D. PENUTUP

Beberapa hal penting yang perlu dirangkum terkait dengan konsep dan sifat-sifat program linear.

1. Masalah dalam kehidupan sehari-hari menjadi model suatu program linear. Konsep program linear didasari oleh konsep persamaan dan pertidaksamaan bilangan real, sehingga sifat-sifat persamaan linear dan pertidaksamaan linear dalam sistem bilangan real banyak digunakan sebagai pedoman dalam menyelesaikan suatu masalah program linear.
2. Model matematika merupakan cara untuk menyelesaikan masalah real yang dikaji. Pembentukan model tersebut dilandasi oleh konsep berpikir logis dan mampu menalar keadaan masalah nyata ke bentuk matematika.
3. Dua pertidaksamaan linear atau lebih dikatakan membentuk kendala program linear linear jika dan hanya jika variabel-variabelnya saling terkait dan variabel yang sama memiliki nilai yang sama sebagai penyelesaian setiap pertidaksamaan linear pada sistem tersebut. Sistem pertidaksamaan ini disebut sebagai kendala.
4. Fungsi tujuan/sasaran (fungsi objektif) merupakan tujuan suatu masalah program linear, yang juga terkait dengan sistem pertidaksamaan program linear.

5. Nilai-nilai variabel (x, y)yang memenuhi kendala pada masalah program linear ditentukan melalui konsep perpotongan dua garis, sedemikian sehingga memenuhi setiap pertidaksamaan yang terdapat pada kendala program linear.
6. Suatu fungsi objektif terdefinisi pada suatu daerah penyelesaian atau daerah yang memenuhi sistem pertidaksamaan (kendala) masalah program linear. Fungsi objektif memiliki nilai jika sistem kendala memiliki daerah penyelesaian atau irisan.
7. Konsep sistem pertidaksamaan dan persamaan linear berlaku juga untuk sistem kendala masalah program linear. Artinya jika sistem tersebut tidak memiliki solusi, maka fungsi sasaran tidak memiliki nilai.
8. Garis selidik merupakan salah satu cara untuk menentukan nilai objektif suatu fungsi sasaran masalah program linear dua variabel. Garis selidik ini merupakan persamaan garis fungi sasaran, $ax + by = k$, yang digeser di sepanjang daerah penyelesaian

Bab 2

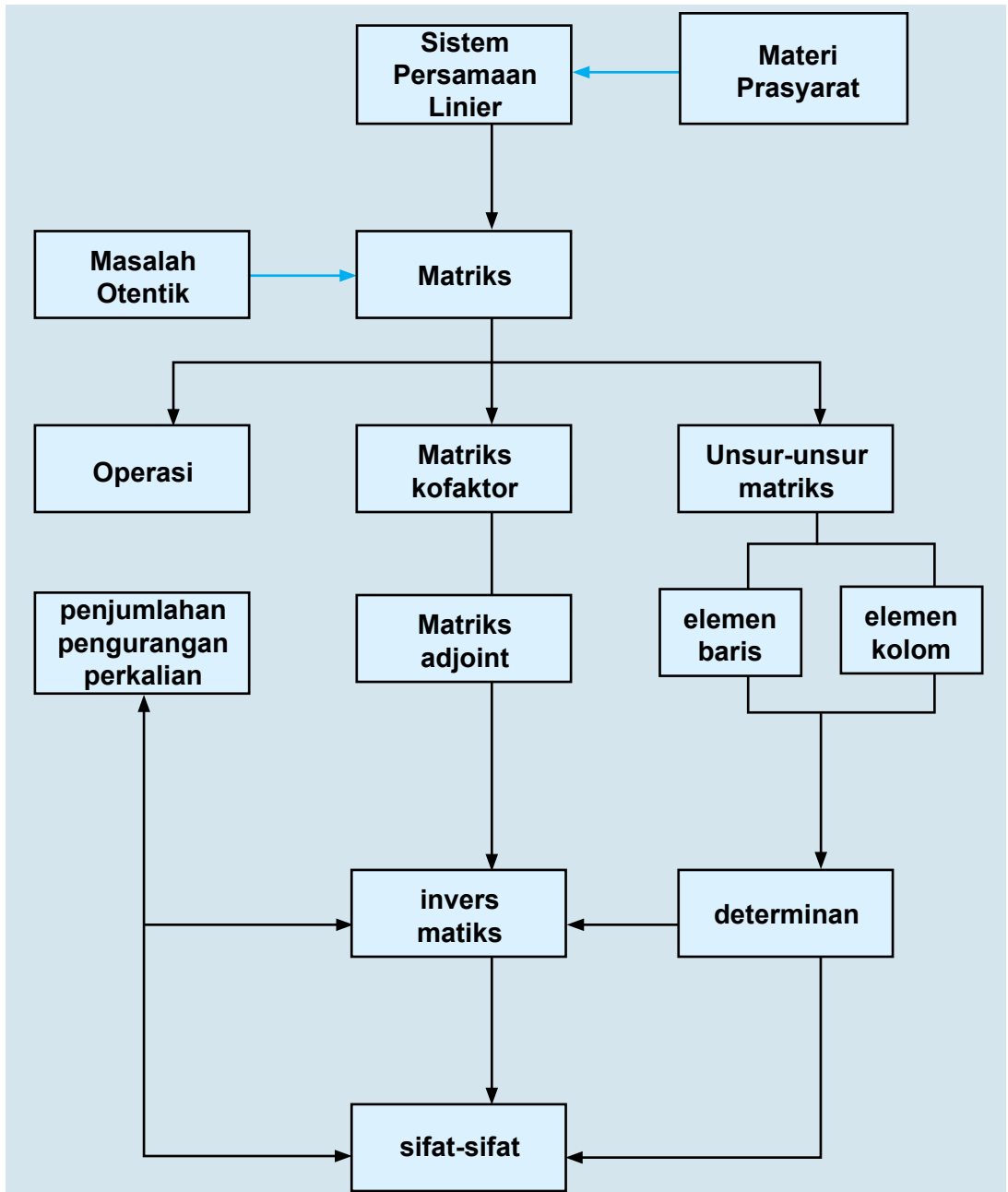
MATRIKS

A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
1. Memiliki motivasi internal, kemampuan bekerjasama, konsisten, sikap disiplin, rasa percaya diri, dan sikap toleransi dalam perbedaan strategi berpikir dalam memilih dan menerapkan strategi menyelesaikan masalah. 2. Mendeskripsikan dan menganalisis konsep dasar operasi matriks dan sifat-sifat operasi matriks serta menerapkannya dalam pemecahan masalah. 3. Memadu berbagai konsep dan aturan operasi matriks dan menyajikan model matematika dari suatu masalah nyata dengan memanfaatkan nilai determinan atau invers matriks dalam pemecahannya.	Melalui pembelajaran materi matriks, siswa memperoleh pengalaman belajar: • mengamati secara cermat aturan susunan objek. • berpikir mandiri mengajukan ide secara bebas dan terbuka. • menemukan hubungan-hubungan di antara objek-objek. • melatih berpikir kritis dan kreatif. • bekerjasama menyelesaikan masalah.

Istilah Penting

- *Operasi pada matriks*
- *Determinan matriks*
- *Invers matriks*

B. PETA KONSEP

C. MATERI PEMBELAJARAN

1. Operasi Pada Matriks Dan Sifat-Sifatnya

Saat duduk di kelas X, kamu telah mempelajari konsep matriks, jenis dan operasi pada matriks yang ditemukan dari berbagai masalah nyata disekitar kehidupan kita. Pada kesempatan ini, kita akan menganalisis sifat-sifat operasi pada matriks dan menggunakannya dalam pemecahan masalah otentik. Amatilah dengan cermat berbagai informasi dan masalah yang diajukan dan temukan sifat-sifat operasi matriks di dalam langkah pemecahan masalah yang diajukan.

a. Operasi Penjumlahan Matriks dan Sifat-sifatnya

Masalah-2.1

Dua orang bersaudara laki-laki dan perempuan membuka dua cabang toko kue di Padang dan di Medan. Toko kue itu menyediakan 2 jenis kue, yaitu; bronis dan bika ambon. Biaya untuk bahan ditangani oleh saudara perempuan dan biaya untuk chef ditangani oleh saudara laki-laki. Biaya untuk tiap-tiap kue seperti pada tabel berikut:

Tabel Biaya Toko di Padang (dalam Rp)

	Bronis	Bika Ambon
Bahan Kue	1.000.000	1.200.000
Chef	2.000.000	3.000.000

Tabel Biaya Toko di Medan (dalam Rp)

	Bronis	Bika Ambon
Bahan Kue	1.500.000	1.700.000
Chef	3.000.000	3.500.000

Berapa total biaya yang diperlukan oleh kedua toko kue?

Alternatif Penyelesaian

Jika kita misalkan matriks biaya di Padang, sebagai matriks A dan matriks biaya di Medan sebagai matriks B, maka matriks biaya kedua toko disajikan sebagai berikut.

$$A = \begin{pmatrix} 1000000 & 1200000 \\ 2000000 & 3000000 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 1500000 & 1700000 \\ 3000000 & 3500000 \end{pmatrix}.$$

Total biaya yang dikeluarkan kedua toko kue tersebut dapat diperoleh, sebagai berikut.
Total biaya bahan untuk bronis = 1.000.000 + 1.500.000 = 2.500.000
Total biaya bahan untuk bika ambon = 1.200.000 + 1.700.000 = 2.900.000
Total biaya *chef* untuk bronis = 2.000.000 + 3.000.000 = 5.000.000
Total biaya *chef* untuk bika ambon = 3.000.000 + 3.500.000 = 6.500.000

Keempat total biaya tersebut dinyatakan dalam matriks berikut:

Tabel Biaya Toko di Medan (dalam Rp)

	Bronis	Bika Ambon
Bahan Kue	2.500.000	2.900.000
Chef	5.000.000	6.500.000

Total biaya pada tabel di atas dapat ditentukan dengan menjumlahkan matriks A dan B.

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} 1000000 & 1200000 \\ 2000000 & 3000000 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1500000 & 1700000 \\ 3000000 & 3500000 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1000000+1500000 & 1200000+1700000 \\ 2000000+3000000 & 3000000+3500000 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2500000 & 2900000 \\ 5000000 & 6500000 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Penjumlahan kedua matriks biaya di atas dapat dioperasikan karena kedua matriks biaya memiliki ordo yang sama, yaitu 2×2. Seandainya ordo kedua matriks biaya tersebut berbeda, kita tidak dapat melakukan penjumlahan dua matriks.

Nah, melalui pembahasan di atas, tentunya dapat didefinisikan penjumlahan dua matriks dalam konteks matematis.

Definisi 2.1

Misalkan *A* dan *B* adalah matriks berordo *m* x *n* dengan elemen-elemen a_{ij} dan b_{ij}. Matriks *C* adalah jumlah matriks *A* dan matriks *B*, ditulis *C*=*A*+*B*, dengan elemen-elemen ditentukan oleh $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ (untuk semua *i* dan *j*).

Catatan:
Dua matriks dapat dijumlahkan hanya jika memiliki ordo yang sama. Ordo matriks hasil penjumlahan dua matriks sama dengan ordo matriks yang dijumlahkan.

Contoh 2.1

a). Jika diketahui matriks $P = \begin{bmatrix} x & 2 & 4 \\ 1 & x-7 & 5 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 8 \\ 1 & y & 1 \end{bmatrix}$ dan

$P + Q = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ Tentukan nilai x dan y!

Jika dimisalkan $R = P + Q$, maka jumlah matriks P dan Q adalah

$$R = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$P + Q = \begin{bmatrix} x+2 & 2+2 & 4+8 \\ 1+1 & x-7+y & 5+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan kesamaan dua matriks, diperoleh

$x + 2 = 12$ atau $x = 10$

$x - 7 + y = 3$ atay $10 - 7 + y = 3$ atau $y = 0$

Jadi diperoleh nilai $x = 10$ dan $y = 0$

b). Diketahui matriks $T = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$. Tunjukkan bahwa $T + 0 = T$ dan $0 + T = T$

dengan 0 adalah matriks nol berordo 3×3.

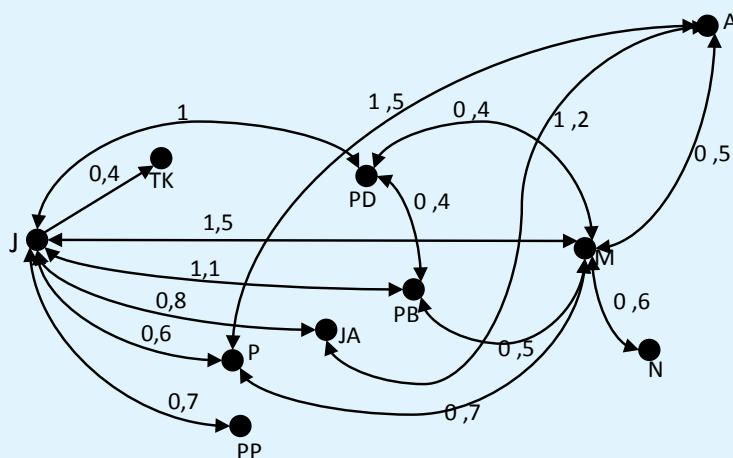
- $T+O=\begin{bmatrix}6&3&1\\5&5&0\\1&3&7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}6+0&3+0&1+0\\5+0&5+0&0+0\\1+0&3+0&7+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&3&1\\5&5&0\\1&3&7\end{bmatrix}=T$$

- $O+T=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6&3&1\\5&5&0\\1&3&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0+6&0+3&0+1\\0+5&0+5&0+0\\0+1&0+3&0+7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&3&1\\5&5&0\\1&3&7\end{bmatrix}=T$

Dalam kajian selanjutnya, jika dikatakan matriks nol, maka kita harus memikirkan matriks nol dengan ordo yang sama dengan matriks yang sedang dikaji. Demikian juga halnya untuk matriks identitas, I.

Masalah-2.2

Cermati skema dan biaya penerbangan salah satu jenis pesawat dari Bandara Soekarno Hatta Jakarta ke berbagai kota yang ada di Pulau Sumatera yang disajikan sebagai berikut.

Gambar 2.1 : Lintasan Penerbangan Pesawat Antar Dua Kota

a) Sajikan lintasan pesawat dalam bentuk matriks A = (a_{ij}), dengan elemen a_{ij} menyatakan adanya lintasan penerbangan yang langsung antar dua kota.
b) Sajikan biaya penerbangan dalam bentuk matriks B = (b_{ij}), dengan b_{ij} menyatakan biaya penerbangan antar dua kota. Selanjutnya tentukan biaya penerbangan yang paling rendah dari kota Jakarta (J) ke kota Aceh (A) dengan bobot biaya penerbangan yang tersedia dalam juta rupiah!
c) Jika matriks pada bagian a) dikalikan dengan dirinya sendiri, apa yang dapat kamu simpulkan dari unsur-unsur matriks tersebut?

Alternatif Penyelesaian

Bagian a)

Kata kunci pada persoalan ini adalah adanya lintasan antar dua kota, secara matematis, fungsi lintasan antar dua kota tersebut, dinyatakan sebagai berikut:

Dari hasil pengamatan lintasan penerbangan pesawat pada skema di atas, diperoleh data sebagai berikut:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{Jika tidak ada lintasan langsung dua kota} \\ 1, & \text{Jika ada lintasan langsung dua kota} \end{cases}$$

i) Banyak lintasan penerbangan pesawat yang langsung dari kota Jakarta (J) ke kota yang lain adalah 7 lintasan, yaitu dari Jakarta ke Tanjung Karang (TK); dari Jakarta ke Palembang (P); dari Jakarta ke Pangkal Pinang (PP); dari Jakarta ke Jambi (JA), dari Jakarta ke Padang (PD), dari Jakarta ke Pekan Baru (PB), dan dari Jakarta ke Medan (M).
ii) Banyak lintasan penerbangan pesawat dari Tanjung Karang ke kota lain adalah 1 lintansan, yaitu dari Tanjung Karang (TJ) ke Jakarta (J).
iii) Banyak lintasan penerbangan pesawat yang langsung dari kota Palembang (P) ke kota yang lain adalah 3 lintasan, yaitu dari Palembang (P) ke Jakarta (J); dari Palembang ke Aceh (A); dan dari Palembang (P) ke Medan (M).
iv) Banyak lintasan penerbangan pesawat yang langsung dari kota Pangkal Pinang (PP) ke kota yang lain adalah 1 lintasan, yaitu dari Pangkal Pinang ke Jakarta.
v) Banyak lintasan penerbangan pesawat yang langsung dari kota Jambi (JA) ke kota yang lain adalah 2 lintasan, yaitu dari Jambi (JA) ke Jakarta (J); dari Jambi (JA) ke Aceh (A).

vi) Banyak lintasan penerbangan pesawat yang langsung dari kota Padang (PD) ke kota yang lain adalah 3 lintasan, yaitu dari Padang (PD) ke Jakarta (J); dari Padang (PD) ke Medan (M); dari Padang (PD) ke Pekan Baru (PB).

vii) Banyak lintasan penerbangan pesawat yang langsung dari kota Pakam Baru (PB) ke kota yang lain adalah 3 lintasan, yaitu dari Pekan Baru (PB) ke Jakarta (J); dari Pekan Baru (PB) ke Padang (PD); dan dari Pekan Baru (PB) ke Medan (M).

viii) Banyak lintasan penerbangan pesawat yang langsung dari kota Medan (P) ke kota yang lain adalah 6 lintasan, yaitu dari Medan (M) ke Jakarta (J); dari Medan (M) ke Padang (PD); dari Medan (M) ke Pekan Baru (PB); dari Medan (M) ke Palembang (P); dari Medan (M) ke Aceh (A); dari Medan (M) ke Nias (N).

ix) Banyak lintasan penerbangan pesawat yang langsung dari kota Aceh (A) ke kota yang lain adalah 3 lintasan, yaitu dari Aceh (A) ke Jakarta (J); dari Aceh (A) ke Medan (M); dari Aceh (A) ke Jambi (JA).

x) Banyak lintasan penerbangan pesawat yang langsung dari kota Nias (N) ke kota yang lain adalah 1 lintasan, yaitu dari Nias (N) ke Medan (M).

Dari data di atas, adanya lintasan penerbangan pesawat antar dua kota, dapat disajikan dalam sebuah matriks A berikut.

$$A = \begin{array}{c} \\ J \\ TK \\ P \\ PP \\ JA \\ PD \\ PB \\ M \\ A \\ N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} J & TK & P & PP & JA & PD & PB & M & A & N \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Perhatikan elemen matriks A di atas, jumlah elemen-elemen baris menyatakan banyaknya lintasan penerbangan dari kota pada baris matriks tersebut. Misalnya pada baris pertama matriks A, jumlah elemen matriks adalah 7, artinya ada 7 lintasan penerbangan dari Jakarta ke kota-kota yang lain pada gambar.

Bagian b)

Dari skema penerbangan di atas, biaya penerbangan antar dua kota yang terhubung langsung, dapat disajikan dalam sebuah matriks B berikut.

B =

	J	TK	P	PP	JA	PD	PB	M	A	N
J	0	0,4	0,6	0,7	0,8	1	1,1	1,5	0	0
TK	0,4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P	0,6	0	0	0	0	0	0	0,7	1,5	0
PP	0,7	0	0	0	0	0	0	0	0	0
JA	0,8	0	0	0	0	0	0	0	1,2	0
PD	1	0	0	0	0	0	0,4	0,4	0	0
PB	1,1	0	0	0	0	0,4	0	0,5	0	0
M	1,5	0	0,7	0	0	0,4	0,5	0	0,5	0,6
A	0	0	1,5	0	1,2	0	0	0,5	0	0
N	0	0	0	0	0	0	0	0,6	0	0

Perhatikan Gambar-2.1 dan Matriks B di atas, terdapat 8 cara (lintasan) penerbangan dari kota Jakarta (J) menuju kota Banda Aceh (A), yaitu:

i) Dari Jakarta menuju kota Medan dan dari Medan menuju Aceh dengan total biaya 2 juta Rupiah.

ii) Dari Jakarta menuju Pekan Baru, dari Pekan Baru menuju Medan dan dari Medan menuju Aceh, dengan total biaya 2,1 juta Rupiah.

iii) Dari Jakarta menuju Pekan Baru, dari Pekan Baru menuju Padang, dari Padang menuju Medan, dari Medan menuju Aceh, dengan total biaya 2,4 juta Rupiah.

iv) Dari Jakarta menuju Palembang, dari Palembang menuju Medan dan dari Medan menuju Aceh, dengan total biaya 1,8 juta Rupiah.

v) Dari Jakarta menuju Jambi, dan dari Jambi menuju Aceh, dengan total biaya 2 juta Rupiah.

vi) Dari Jakarta menuju Padang, dari Padang menuju Medan, dan dari Medan menuju Aceh, dengan total biaya 1,9 juta Rupiah.

vii) Dari Jakarta menuju Padang, dari Padang menuju Pekan Baru, dari Pekan Baru Menuju Medan dan dari Medan menuju Aceh, dengan total biaya 2,4 juta Rupiah.

viii) Dari Jakarta menuju Palembang, dari Palembang menuju Aceh, dengan total biaya 2,1 juta Rupiah.

Dari ke delapan lintasan dari Jakarta menuju Aceh, biaya terendah diperoleh melalui jalur Jakarta menuju Palembang, dari Palembang menuju Medan, dan dari Medan menuju Aceh, dengan total biaya 1,8 juta Rupiah.

Ingat kembali materi operasi penjumlahan matriks yang kamu sudah pelajari di kelas X, jika kita jumlahkan matriks B dengan dirinya sendiri diperoleh

$$B + B = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}7 & 0{,}8 & 1 & 1{,}1 & 1{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}7 & 1{,}5 & 0 \\ 0{,}7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0 & 0 \\ 1{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}4 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 1{,}5 & 0 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 1{,}5 & 0 & 1{,}2 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}6 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}7 & 0{,}8 & 1 & 1{,}1 & 1{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}7 & 1{,}5 & 0 \\ 0{,}7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0 & 0 \\ 1{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}4 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 1{,}5 & 0 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 1{,}5 & 0 & 1{,}2 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B+B=2.\begin{pmatrix} 0 & 0,4 & 0,6 & 0,7 & 0,8 & 1 & 1,1 & 1,5 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,7 & 1,5 & 0 \\ 0,7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0,4 & 0 & 0 \\ 1,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 1,5 & 0 & 0,7 & 0 & 0 & 0,4 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0,6 \\ 0 & 0 & 1,5 & 0 & 1,2 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$B + B = 2B$.

Makna elemen matriks $2B$ adalah biaya pulang pergi untuk penerbangan antar dua kota. Misalnya biaya penerbangan dari Jakarta menuju Medan, dan sebaliknya, biaya pulang pergi adalah 2 × 1,5 juta = 3 juta Rupiah.

$$\textit{Misalkan matriks } B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{B+B+B+\ldots+B}_{8}=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}+\ldots+\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}}_{8}$$

$$8B = 8.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Definisi 2.2

Misalkan B sebuah matriks dengan ordo $n \times m$, $n \in N$. Hasilnya penjumlahan matriks B sebanyak k dengan $k \in N$ adalah $k\,B$, ditulis $\underbrace{B+B+B+\ldots+B}_{k}=k\,B$, dan matriks $k\,B$ berordo $n \times n$.

b. Sifat Komutatif Penjumlahan Matriks

Masalah-2.3

Perhatikan masalah di bawah ini!
Di suatu pasar terdapat dua orang pedagang mangga, jenis buah yang dijual antara lain mangga dengan kualitas tinggi dan mangga dengan kualitas sedang. Pedagang satu memiliki 3 kg mangga kualitas tinggi dan 6 kg mangga kualitas sedang. Pedagang kedua memiliki 1 kg mangga dengan kualitas tinggi dan 8 kg mangga kualitas sedang. Keesokan harinya kedua pedagang tersebut berbelanja untuk menambah persediaan mangganya. Pedagang satu menambah 20 kg mangga berkualitas tinggi dan 15 mangga kualitas sedang, sedangkan pedagang kedua menambah 20 kg mangga kualitas tinggi dan 10 kg mangga kualitas sedang.
Berapakah persediaan mangga setiap pedagang sekarang?

Alternatif penyelesaian

Pedagang satu dan pedagang dua memiliki mangga kualitas tinggi dan sedang dan pada hari berikutnya kedua pedagang menambah persediaan mangga seperti tabel di bawah ini:

Tabel persediaan mangga sebelum penambahan

	Kualitas Tinggi	Kualitas Sedang
Pedagang I	3	6
Pedagang II	1	8

Tabel tambahan persediaan mangga

	Kualitas Tinggi	Kualitas Sedang
Pedagang I	20	15
Pedagang II	20	10

Jika kita misalkan matriks persediaan buah mangga sebelum penambahan sebagai matriks A dan sesudah penambahan sebagai matriks B. Matriks A dan B disajikan sebagai berikut.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 20 & 15 \\ 20 & 10 \end{pmatrix}.$$

Ingat kembali materi operasi pada matriks yang sudah dipelajari. Dua matriks dapat dijumlahkan apabila kedua matriks tersebut memiliki ordo yang sama. Matriks A dan B memiliki ordo yang sama, yaitu; matriks berordo 2×2.

Maka jumlah keseluruhan persediaan mangga dapat diperoleh sebagai berikut.

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 & 15 \\ 20 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3+20 & 6+15 \\ 1+20 & 8+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 21 \\ 21 & 18 \end{pmatrix}$$

$$B + A = \begin{pmatrix} 20 & 15 \\ 20 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20+3 & 15+6 \\ 20+1 & 10+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 21 \\ 21 & 18 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan hasil operasi di atas dapat disimpulkan (1) total persediaan mangga Pedagang I adalah 23 kg mangga kualitas tinggi dan 21 kg mangga kualitas sedang; (2) total persediaan mangga Pedangang II adalah 21 kg mangga kualitas tinggi dan 18 kg mangga kualitas sedang; (3) ternyata hasil penjumlahan matriks $A + B = B + A$.

Contoh 2.2

Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ dan matriks $B = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \\ 1 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \\ 1 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3+(-3) & -1+(-1) & 2+2 \\ 0+0 & 6+6 & 4+4 \\ 1+1 & 5+(-5) & 1+(-1) \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 0 & 12 & 8 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B + A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \\ 1 & -5 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3+3 & -1+(-1) & 2+2 \\ 0+0 & 6+6 & 4+4 \\ 1+1 & -5+5 & -1+1 \end{pmatrix}$$

$$B + A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 0 & 12 & 8 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan contoh di atas dapat disimpulkan bahwa $A + B = B + A$.

Mari kita buktikan secara umum bahwa operasi penjumlahan pada matriks memenuhi sifat komutatif. Misalkan matriks A dan B berordo $n \times k$. Elemen-elemen matrik A dan B adalah bilangan real yang disajikan sebagai berikut.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & . & a_{3k} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & . & . & a_{nk} \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & . & . & , & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & . & . & . & b_{2k} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & . & . & . & b_{3k} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & . & . & . & b_{nk} \end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2k} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & \cdots & a_{1k}+b_{1k} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & \cdots & a_{2k}+b_{2k} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} & \cdots & a_{3k}+b_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & a_{n3}+b_{n3} & \cdots & a_{nk}+b_{nk} \end{pmatrix}$$

Karena nilai a_{ij} dan b_{ij} untuk setiap i dan j adalah bilangan real, maka nilai $a_{ij} + b_{ij}$ sama dengan nilai $b_{ij} + a_{ij}$ atau $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$. Dengan demikian hasil penjumlahan $A + B = B + A$.

Sifat 2.1

Misalkan matriks A dan B berordo $n \times k$. Penjumlahan matriks A dan B memenuhi sifat komutatif jika dan hanya jika $A + B = B + A$.

Contoh 2.3

Diberikan matriks $A = \begin{pmatrix} x-2y & y \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2x & x-y \end{pmatrix}$ dengan hasil penjumlahan matriks $B + A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 16 & 2 \end{pmatrix}$. Tentukan matriks A dan B!

Alternatif penyelesaian

Berdasarkan Definisi-2.2 di atas, $A + B = B + A$, sehingga diperoleh

$$A + B = \begin{pmatrix} x-2y & y \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2x & x-y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x-2y+5 & y+3 \\ 2x+4 & x-y+1 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan Definisi-2.2 di atas, $A + B = B + A$, sehingga diperoleh

$$\begin{pmatrix} x-2y+5 & y+3 \\ 2x+4 & x-y+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 16 & 2 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan sifat kesamaan dua matriks, maka diperoleh

$x - 2y + 5 = 1$; $y + 3 = 8$; $2x + 4 = 16$, dan $x - y + 1 = 2$. Dari keempat persamaan ini diperoleh nilai x, dan y.

$2x + 4 = 16$ diperoleh $x = 6$.

$y + 3 = 8$ maka $y = 5$

Dengan demikian matriks $A = \begin{pmatrix} x-2y & y \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ dan matriks $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$

c. Sifat Asosiatif Penjumlahan Matriks

Masalah-2.4

Pada suatu acara perlombaan masak pada acara 17 Agustus di SMA yang terdiri dari tiga sekolah, terdapat tiga peserta perwakilan dari masing-masing sekolah. Terdapat tiga orang anggota tim juri menilai dari setiap hasil masakan dari masing-masing sekolah, dengan nilai rentang nilai 6 sampai 10. Tabel nilai tersebut adalah

Tabel persediaan mangga sebelum penambahan

	Juri I	Juri II	Juri III
SMA I	8	8	9
SMA II	7	8	8
SMA III	10	8	8

Alternatif penyelesaian

Misalkan:

- Nilai dari juri I untuk masing-masing sekolah:

$$\begin{bmatrix} SMAI \\ SMAII \\ SMAIII \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- Nilai juri II untuk masing-masing sekolah:

$$\begin{bmatrix} SMAI \\ SMAII \\ SMAII \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

- Nilai juri III untuk masing-masing sekolah:

$$\begin{bmatrix} SMAI \\ SMAII \\ SMAII \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$(I + II) + III = \left(\begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 \\ 15 \\ 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 23 \\ 26 \end{bmatrix}$$ **Atau**

$$I + (II+III) = \left(\begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix} \right) + \left(\begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}\right) + \left(\begin{bmatrix} 17 \\ 16 \\ 16 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 25 \\ 23 \\ 26 \end{bmatrix}$$

Dari penyelesaian tersebut dapat diketahui peringkat I adalah SMA III, Peringkat kedua adalah SMA I, dan peringkat ketiga adalah SMA II. Selanjutnya dapat disimpulkan bahwa matriks I + (II + III) = (I + II) + III. Hal ini dinamakan **sifat asosiatif operasi penjumlahan pada matriks.**

Contoh 2.4

Misalkan $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 6 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -5 & 8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$A + (B + C) = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 6 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -5 & 8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 1 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A + (B + C) = \begin{pmatrix} 11 & -7 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A + B) + C = \left(\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 6 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -5 & 8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & -6 \\ 8 & -7 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -5 & 8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & -7 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan contoh di atas dapat disimpulkan bahwa hasil penjumlahan matriks

$$A + (B + C) = (A + B) + C = \begin{pmatrix} 11 & -7 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Sifat 2.2

Misalkan matriks *A, B* dan *C* berordo *n* x *k*. Penjumlahan matriks *A, B* dan *C* memenuhi sifat asosiatif jika dan hanya jika *A + (B+C)* = *(A+B)* + *C*.

2. Pengurangan Dua Matriks

Sebagai gambaran awal mengenai operasi pengurangan dua matriks, mari kita cermati contoh masalah berikut ini.

Masalah-2.5

Sebuah pabrik tekstil hendak menyusun tabel aktiva mesin dan penyusutan mesin selama 1 tahun yang dinilai sama dengan 10 % dari harga perolehan sebagai berikut:

Lengkapilah tabel tersebut dengan menggunakan matriks!

Jenis Aktiva	Harga Perolehan (Rp)	Penyusutan Tahun I (Rp)	Harga Baku (Rp)
Mesin A	25.000.000	2.500.000	
Mesin B	65.000.000	6.500.000	
Mesin C	48.000.000	4.800.000	

Alternatif penyelesaian

Misalkan:

Harga perolehan merupakan matriks $A = \begin{bmatrix} 25.000.000 \\ 65.000.000 \\ 48.000.000 \end{bmatrix}$

Penyusutan tahun pertama merupakan matriks $B = \begin{bmatrix} 2.500.000 \\ 6.500.000 \\ 4.800.000 \end{bmatrix}$

Untuk mencari harga baku pada tabel tersebut adalah

$$A - B = \begin{bmatrix} 25.000.000 \\ 65.000.000 \\ 48.000.000 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.500.000 \\ 6.500.000 \\ 4.800.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.500.000 \\ 58.500.000 \\ 43.200.000 \end{bmatrix}$$

Rumusan penjumlahan dua matriks di atas dapat kita diterapkan untuk memahami konsep pengurangan matriks A dengan matriks B.

Misalkan A dan B adalah matriks-matriks berordo $m \times n$. Pengurangan matriks A dengan matriks B didefinisikan sebagai jumlah matriks A dan lawan matriks $-B$, ditulis:

$$A-B=A+(-B).$$

Matriks $-B$ merupakan matriks yang setiap unsurnya berlawanan tanda dengan setiap unsur yang bersesuaian dengan matriks B.

Dari pemahaman penyelesaian Masalah-2.5 di atas, pengurangan dua matriks dapat juga dilakukan dengan mengurangkan langsung elemen-elemen yang seletak dari kedua matriks tersebut, seperti yang berlaku pada penjumlahan dua matriks, yaitu : $A\text{-}B = [a_{ij}] - [b_{ij}]$

3. Perkalian Suatu Bilangan Real dengan Matriks

Dalam aljabar matriks, bilangan real k sering disebut sebagai skalar. Oleh karena itu perkalian real terhadap matriks juga disebut sebagai perkalian skalar dengan matriks.

Sebelumnya, pada kajian pengurangan dua matriks, $A - B = A + (-B)$, $(-B)$ dalam hal ini sebenarnya hasil kali bilangan –1 dengan semua elemen matriks B. Artinya, matriks $(-B)$ dapat kita tulis sebagai :

$$-B = k.B, \text{ dengan } k = -1.$$

Secara umum, perkalian skalar dengan matriks dirumuskan sebagai berikut.

Misalkan A suatu matriks berordo $m \times n$ dengan elemen-elemen a_{ij} dan k adalah suatu bilangan real. Matriks C adalah hasil perkalian bilangan real k dengan matriks A, dinotasikan $C = k.A$, bila matriks C berordo $m \times n$ dengan elemen-elemennya ditentukan oleh :

$$c_{ij} = k.a_{ij} \text{ (untuk semua } i \text{ dan } j\text{)}.$$

Contoh 2.5

a) Jika $T = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -5 \\ 12 & 5 \end{bmatrix}$, Maka $2.H = \begin{bmatrix} 2\times(-2) & 2\times(-4) \\ 2\times(-4) & 2\times(-4) \\ 2\times 12 & 2\times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ -8 & -10 \\ 24 & 10 \end{bmatrix}$.

b) Jika $S = \begin{bmatrix} 18 & 60 & 15 \\ 9 & 24 & 18 \\ 3 & -3 & -12 \end{bmatrix}$, Maka

$$\frac{1}{3}S = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\times 18 & \frac{1}{3}\times 60 & \frac{1}{3}\times 15 \\ \frac{1}{3}\times 9 & \frac{1}{3}\times 24 & \frac{1}{3}\times 18 \\ \frac{1}{3}\times 3 & \frac{1}{3}\times(-3) & \frac{1}{3}\times(-12) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 20 & 5 \\ 3 & 8 & 6 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

c) Jika $P = \begin{bmatrix} 16 & 40 & 36 \\ 24 & 60 & 72 \end{bmatrix}$, Maka

$$\frac{1}{4}P + \frac{3}{4}P = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\times 16 & \frac{1}{4}\times 40 & \frac{1}{4}\times 36 \\ \frac{1}{4}\times 24 & \frac{1}{4}\times 60 & \frac{1}{4}\times 72 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{4}\times 16 & \frac{3}{4}\times 40 & \frac{3}{4}\times 36 \\ \frac{3}{4}\times 24 & \frac{3}{4}\times 60 & \frac{3}{4}\times 72 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 10 & 9 \\ 6 & 15 & 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 30 & 27 \\ 18 & 45 & 54 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 40 & 36 \\ 24 & 60 & 72 \end{bmatrix} = P$$

4. Operasi Perkalian Dua Matriks dan Sifat-sifatnya

Masalah-2.6

P.T Melodi adalah sebuah perusahaan multinasional yang bergerak di bidang penjualan alat-alat musik. Perusahaan tersebut memiliki beberapa toko penjulan di beberapa kota besar di Indonesia. Persediaan alat-alat olah raga di setiap toko disajikan pada tabel berikut.

Tabel 1.1: Alokasi setiap sumber yang tersedia

Sumber	Jenis Alat Musik			
	Piano	Gitar	Terompet	Seksopon
Medan	95	68	85	75
Surabaya	70	57	120	80
Makasar	85	60	56	90
Yogya	45	90	87	64
Bandung	75	54	90	65

Tabel di bawah ini menyatakan harga satu buah untuk setiap jenis alat musik

Jenis Alat Musik	Harga (Rp)
Piano	15.000.000,–
Gitar	1.500.000,–
Terompet	5.000.000,–
Seksofon	5.000.000,–

Setiap toko di masing-masing kota telah berhasil menjual berbagai jenis alat musik yang disajikan pada tabel berikut.

Kota/ Terjual	Jenis Alat Musik			
	Piano	Gitar	Terompet	Seksopon
Medan	85	56	84	70
Surabaya	55	52	85	65
Makasar	80	48	43	86
Yogya	42	60	67	62
Bandung	72	51	78	60

Amatilah data di atas dan tentukan nilai dari

a. Nilai persediaan alat musik seluruhnya!

b. Penghasilan kotor perusahaan P.T Melodi

Alternatif Penyelesaian

Misalkan *P* adalah matriks yang menyatakan persediaan alat musik di setiap kota dan matriks *H* adalah matriks yang menyatakan harga untuk setiap jenis alat musik serta *T* adalah matriks yang menyatakan banyaknya barang yang telah berhasil dijual di setiap kota. Matriks *P*, *H*, dan *T* dapat ditulis sebagai berikut.

Kota/ Terjual	Jenis Alat Musik			
	Piano	Gitar	Terompet	Seksopon
Medan	85	56	84	70
Surabaya	55	52	85	65
Makasar	80	48	43	86
Yogya	42	60	67	62
Bandung	72	51	78	60

$$P = \begin{pmatrix} 95 & 68 & 85 & 75 \\ 70 & 57 & 120 & 80 \\ 85 & 60 & 56 & 90 \\ 45 & 90 & 87 & 64 \\ 75 & 54 & 90 & 65 \end{pmatrix} \text{ dan } H = \begin{pmatrix} 15000000 \\ 1500000 \\ 5000000 \\ 5000000 \end{pmatrix} \text{ dan } T = \begin{pmatrix} 85 & 56 & 84 & 70 \\ 55 & 52 & 85 & 65 \\ 80 & 48 & 43 & 86 \\ 42 & 60 & 67 & 62 \\ 72 & 51 & 78 & 60 \end{pmatrix}$$

$$\text{Nilai Barang Keseluruhan} = \begin{pmatrix} 95 & 68 & 85 & 75 \\ 70 & 57 & 120 & 80 \\ 85 & 60 & 56 & 90 \\ 45 & 90 & 87 & 64 \\ 75 & 54 & 90 & 65 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 15000000 \\ 1500000 \\ 5000000 \\ 5000000 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 95(15000000) + 68(1500000) + 85(5000000) + 75(5000000) \\ 70(15000000) + 57(1500000) + 120(5000000) + 80(5000000) \\ 85(15000000) + 60(1500000) + 56(5000000) + 90(5000000) \\ 45(15000000) + 90(1500000) + 87(5000000) + 64(5000000) \\ 75(15000000) + 54(1500000) + 90(5000000) + 65(5000000) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1425000000 + 102000000 + 425000000 + 375000000 \\ 1050000000 + 85500000 + 600000000 + 400000000 \\ 1275000000 + 80000000 + 280000000 + 450000000 \\ 675000000 + 135000000 + 435000000 + 320000000 \\ 1125000000 + 81000000 + 450000000 + 325000000 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2327000000 \\ 2135500000 \\ 2805000000 \\ 7640000000 \\ 1981000000 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan hasil perhitungan di atas, diperoleh nilai barang keseluruhan di setiap toko di masing-masing kota adalah

$$\text{Nilai Inventori Barang} = \begin{pmatrix} 2327000000 \\ 2135500000 \\ 2805000000 \\ 7640000000 \\ 1981000000 \end{pmatrix} \begin{matrix} \textit{Medan} \\ \textit{Surabaya} \\ \textit{Makasar} \\ \textit{Yogya} \\ \textit{Bandung} \end{matrix}$$

Berdiskusilah dengan temanmu, coba tentukan nilai barang yang terjual di setiap toko di kota.

Dapat kita cermati dari perkalian di atas, bahwa setiap elemen baris pada matriks C berkorespondensi satu-satu dengan setiap elemen kolom pada matriks D. Seandainya terdapat satu saja elemen baris ke-1 pada matriks C tidak memiliki pasangan dengan elemen kolom ke-1 pada matriks D, maka operasi perkalian terhadap kedua matriks itu tidak dapat dilakukan. Jadi, dapat disimpulkan operasi perkalian terhadap dua matriks dapat dilakukan jika banyak baris pada matriks C sama dengan banyak kolom pada matriks D. Banyak perkalian akan berhenti jika setiap elemen baris ke-n pada matriks C sudah dikalikan dengan setiap elemen kolom ke-n pada matriks D.

Secara matematis, kita dapat menyatakan perkalian dua matriks sebagai berikut. Misalkan matriks $A_{m \times n}$ dan matriks $B_{n \times p}$, matriks A dapat dikalikan dengan matriks B jika banyak baris matriks A sama dengan banyak kolom B. Hasil perkalian matriks A berordo m × n terhadap matriks B berordo $n \times p$ adalah suatu matriks berordo $m \times p$. Proses menentukan elemen-elemen hasil perkalian dua matriks dipaparkan sebagai berikut.

$$A_{m \times n} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{dan} = B_{n \times p} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

Jika C adalah matriks hasil perkalian matriks $A_{m \times n}$ terhadap matriks $B_{n \times p}$, dinotasikan $C=A.B$, maka C berordo $m \times p$. Elemen-elemen matriks C pada baris ke-i dan kolom ke-j, dinotasikan c_{ij}, diperoleh dengan cara mengalikan elemen baris ke-i dari matriks A terhadap elemen kolom ke-j dari matriks B, kemudian dijumlahkan. Dinotasikan $c_{ij}=a_{i1}.b_{1j}+a_{i2}.b_{2j}+a_{i3}.b_{3j}+...+a_{in}.b_{nj}$

Definisi 2.3

Misalkan $A = [a_{ij}]$ adalah matriks yang berordo $m \times p$ dan B = adalah matriks yang berordo $q \times n$.

Hasil kali matriks A dan B adalah suatu matriks C berordo $m \times n$ dinotasikan $A \times B = C = [c_{ij}]$ berordo $m \times n$ dengan elemen baris ke-i dan kolom ke-j adalah: $c_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + a_{i3}\, b_{3j} + \ldots + a_{ip}\, b_{pj}$, dengan $i = 1,2,3, \ldots, m$; dan $j = 1,2,3,\ldots,n$.

Catatan: Matriks A dan B dapat dikalikan apabila banyak kolom matriks A sama dengan banyak baris matriks B.

Mari kita pelajari contoh-contoh di bawah ini, untuk memudahkan kita mengerti akan konsep di atas!

Contoh 2.6

Gambarkan daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan berikut ini.

a) Diketahui matriks $A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ dan $B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$ matriks hasil

perkalian matriks A dan matriks B, $A.B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21} + a_{13}.b_{31} & a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22} + a_{13}.b_{32} & a_{11}.b_{13} + a_{12}.b_{23} + a_{13}.b_{33} \\ a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21} + a_{23}.b_{31} & a_{21}.b_{12} + a_{22}.b_{22} + a_{23}.b_{32} & a_{21}.b_{13} + a_{22}.b_{23} + a_{23}.b_{33} \\ a_{31}.b_{11} + a_{32}.b_{21} + a_{33}.b_{31} & a_{31}.b_{12} + a_{32}.b_{22} + a_{33}.b_{32} & a_{31}.b_{13} + a_{32}.b_{23} + a_{33}.b_{33} \end{bmatrix}$$

Sekarang, silahkan tentukan hasil perkalian matriks B terhadap matriks A. Kemudian, simpulkan apakah berlaku atau tidak sifat komutatif pada perkalian matriks? Berikan alasanmu!

b) Mari kita tentukan hasil perkalian matriks $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, dengan menggunakan

konsep perkalian dua matriks di atas, diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2+2.1 & 1.3+2.2 & 1.4+2.0 \\ 3.2+4.1 & 3.3+4.2 & 3.4+4.0 \\ 5.2+6.1 & 5.3+6.2 & 5.4+6.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 4 \\ 10 & 17 & 12 \\ 16 & 27 & 20 \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan hasil diskusi yang kamu peroleh pada contoh a) dan b), silahkan periksa apakah matriks $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ dapat dikalikan terhadap matriks $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$? Berikan penjelasanmu!

a. Sifat Asosiatif dan Distributif Operasi Perkalian Matriks

Misalkan Matriks $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 12 & -1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 12 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} -25+36 & 15-3 \\ -60+12 & 36-1 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ -48 & 35 \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 12 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} -25+36 & -15+3 \\ 60-12 & 36-1 \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 11 & -12 \\ 48 & 35 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan hasil perhitungan di atas, dapat disimpulkan bahwa perkalian matriks tidak memenuhi sifat komutatif sebab $A \times B \neq B \times A$

Mari kita cek sifat asosiatif!

$$A \times (B \times C) = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 12 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \times (B \times C) = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ 23 & -13 \end{pmatrix}$$

$$A \times (B \times C) = \begin{pmatrix} 34 & 1 \\ -61 & 83 \end{pmatrix}$$

Sekarang perhatikan hasil perkalian matriks

$$(A \times B) \times C = \left(\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 12 & -1 \end{pmatrix}\right) \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A \times B) \times C = \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ -48 & 35 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A \times B) \times C = \begin{pmatrix} 34 & 1 \\ -61 & 83 \end{pmatrix}$$

Dari hasil perhitungan di atas dapat disimpulkan $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.

Sifat 2.3

Misalkan matriks A *berordo* $m \times n$, B *berordo* $n \times p$ dan C *berordo* $p \times q$ dengan $m, n, p, q \in N$. Perkalian matriks memenuhi sifat asosiatif jika dan hanya jika $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.

Perhatikan kembali matriks A, B, dan C di atas.

Matriks $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 12 & -1 \end{pmatrix}$ dan $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} A \times (B + C) &= \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} \times \left\{\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 12 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 13 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 24 & 10 \\ -23 & 24 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A \times B) + (A \times C) &= \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 12 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ -48 & 35 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 13 & -2 \\ 25 & -11 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 24 & 10 \\ -23 & 24 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dari hasil perhitungan di atas, dapat disimpulkan bahwa $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$.

Sifat 2.4

Misalkan matriks A berordo $m \times n$, B berordo $n \times p$ dan C berordo $n \times p$ dengan $m, n, p, q \in N$. Perkalian matriks memenuhi sifat distributif operasi perkalian terhadap operasi pen–jumlahan matriks jika dan hanya jika $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$.

Nah, sekarang mari kita cermati untuk perkalian berulang suatu matriks A berordo $p \times q$.

Contoh 2.7

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Tentukanlah A^{2013}

Alternatif Penyelesaian

Mari cermati langkah-langkah berikut!

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -1. \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -1$$

Jika $A^2 = -I$, maka $A^4 = I$. Artinya, untuk setiap pangkat matriks A kelipatan 4, akan ditemukan matriks identitas.

Selanjutnya, 2013 dapat kita tuliskan sebagai berikut:

$2013 = 4.(503)+1$.

Akibatnya,

$A^{2013} = A^{(4.(503)+1)} = (A^4)^{503}.A^1$.

Matriks $A^4 = I$, dan $I^n = I, n = 1,2,3,\ldots$, akibatnya berlaku, $(A^4)^{503} = I$. Oleh karena itu, $A^{2013} = I.A = A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Dari hasil pembahasan Contoh 2.7, secara umum dapat kita nyakan dalam definisi berikut ini.

Definisi 2.7

Misalkan matriks A berordo $p \times q$ dan $n \in N$.

$$A^n = \underbrace{A \times A \times A \times \ldots A}_{n\ faktor}$$

A^{2013} pada contoh di atas, dengan $A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, kebetulan memiliki pola untuk menentukan hasilnya. Namun, jika kamu menjumpai masalah untuk menentukan A^n, n bilangan asli dapat kamu kerjakan dengan menentukan hasil kali matriks A sebanyak n faktor.

Pertanyaan Kritis: Apakah $A^4 = I$ berlaku untuk sembarang matriks persegi berordo 2 × 2 ?

Uji Kompetensi 2.1

1. Hasil penjumlahan matriks $\begin{pmatrix}p+2 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}p & 6\\ 6 & q+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 9 & 5\end{pmatrix}$. Tentukan nilai p dan q!.
2. Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix}p+2 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix}p & 6\\ 6 & q+3\end{pmatrix}$ Bila $3A = B$, Tentukan nilai p dan q!.
3. Diberikan matriks $A = \begin{pmatrix}4 & -2\\ 3 & -5\end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix}4 & 6\\ 3 & -3\end{pmatrix}$ dan $C = \begin{pmatrix}-26 & -2\\ 3 & -35\end{pmatrix}$ Tunjukkan bahwa $A + B = B^2. + C$.
4. Tentukanlah hasil perkalian matriks-matriks berikut!

   a. $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\\ 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 5 & 4\end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix}2 & 1 & 5\\ 7 & 6 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$

   c. $\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

   d. $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 3 & 4 & 5\\ 5 & 6 & 3\end{bmatrix}$
5. Apa yang dapat kamu jelaskan tentang operasi pembagian matriks? Misalnya diketahui persamaan matriks $A.C = B$, dengan matriks A dan B matriks yang diketahui. Bagaimana kita menentukan matriks C? Paparkan di depan kelas!
6. Berikan dua matriks yang memenuhi kesamaan:
   i. $(A + B)^2 = A^2 + B^2$
   ii. $A^2 - B^2 = (A - B).(A + B)$
7. Seorang agen perjalanan menawarkan paket perjalanan ke Danau Toba. Paket I

terdiri atas 3 malam menginap, 2 tempat wisata dan 4 kali makan. Paket II dengan 4 malam menginap, 5 tempat wisata dan 8 kali makan. Paket III dengan 3 malam menginap, 2 tempat wisata dan tidak 1 makan. Sewa hotel Rp 250.000,00 per malam, biaya pengangkutan ke tiap tempat wisata Rp 35.000,00, dan makan di restoran yang ditunjuk Rp 75.000,00.

a) Dengan menggunakan perkalian matriks, tentukan matriks biaya untuk tiap paket.
b) Paket mana yang menawarkan biaya termurah?

8. Sebuah perusahaan angkutan menawarkan tiket pulang bersama ke Provinsi Jawa Timur. Perusahaan angkutan tersebut mempunyai tiga jenis bus, yaitu Excecutif, Economi, dan AC. Setiap bus dilengkapi dengan kursi penumpang untuk kelas umum, mahasiswa dan pelajar. Jumlah kursi penumpang tiga jenis bus tersebut disajikan pada tabel di bawah ini.

	Eksekutif	**Ekonomi**	**AC**
Umum	40	42	41
Mahasiswa	33	41	35
Pelajar	30	39	28

Perusahaan telah mendaftar jumlah penumpang yang mengikuti perjalanan wisata ke negara A, seperti pada tabel berikut.

Kategori penumpang	**Jumlah penumpang**
Umum	123
Mahasiswa	109
Pelajar	94

Berapa banyak bus yang harus disediakan untuk perjalaan tersebut?

9. Tentukanlah $B^3 - 4B^2 + B - 4I$, dengan matriks I merupakan matriks identitas berordo 3×3 dan matriks $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

10. Jika matriks $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, maka tentukanlah matriks $D^3 - 4D^2 + D + 4.I$, dengan matriks I merupakan matriks identitas berordo 3×3

11. Tentukanlah nilai p dan q yang memenuhi syarat berikut ini!

    a) $R = \begin{bmatrix} p & 2 \\ 0 & q \end{bmatrix}$ dan $R^2 = I$

    b) $S = \begin{bmatrix} .3 & -1 \\ .2 & -5 \end{bmatrix}$ dan $S^2 = p.S + q.I$

Projek

Rancang sebuah permasalahan terkait pekerjaan tukang pos yang melibatkan matriks. Beri bobot lintasan kenderaan dari sisi jarak atau biaya dalam pelaksanaan tugas mengantar surat atau barang dari rumah ke rumah penduduk. Selesaikan tugas ini secara berkelompok. Buat laporan hasil kerjamu dan sajikan di depan kelas.

5. DETERMINAN DAN INVERS MATRIKS

a. Determinan Matriks.

Masalah-2.8

Siti dan teman-temannya makan di sebuah warung. Mereka memesan 3 ayam penyet dan 2 gelas es jeruk di kantin sekolahnya. Tak lama kemudian, Beni datang dan teman-temannya memesan 5 porsi ayam penyet dan 3 gelas es jeruk. Siti menantang Amir menentukan harga satu porsi ayam penyet dan harga es jeruk per gelas, jika Siti harus membayar Rp70.000,00 untuk semua pesanannya dan Beni harus membayar Rp115.000,00 untuk semua pesanannya, berapakah harga satu porsi ayam penyet dan es jeruk per gelasnya?

Alternatif Penyelesaian

Cara I

Petunjuk : Ingat kembali materi sistem persamaan linier yang sudah kamu pelajari. Buatlah sistem persamaan linear dari masalah tersebut, lalu selesaikan dengan matriks.

Misalkan :

x = harga satu porsi ayam penyet

y = harga es jeruk per gelas

Sistem persamaan linearnya : $3x + 2y = 70000$

$5x + 3y = 115000$

Dalam bentuk matriks adalah sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70000 \\ 115000 \end{bmatrix}$$

Mengingat kembali bentuk umum persamaan linier dua variabel.

$$\left.\begin{matrix} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Solusi persamaan tersebut adalah:

$$x = \frac{b_2.c_1 - b_1.c_2}{a_1.b_2 - a_2.b_1} \text{ dan } y = \frac{a_1.c_2 - a_2.c_1}{a_1.b_2 - a_2.b_1}, \; a_1b_2 \neq a_2b_1 \quad \text{...(2)}$$

- Ingat kembali bagaimana menentukan himpunan penyelesain SPLDV. Tentunya, kamu mampu menunjukkannya.

Cara II

Dalam konsep matriks, nilai $a_1.b_2 - a_2.b_1$ disebut sebagai determinan matriks $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$, dinotasikan $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ atau *det* (A), dengan matriks $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = A$

Oleh karena itu, nilai x dan y pada persamaan (2), dapat ditulis menjadi:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \text{ dan } y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad \text{...(3)}$$

dengan $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$

Kembali ke persamaan (1), dengan menerapkan persamaan (3), maka diperoleh:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 70000 & 2 \\ 115.000 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{210.000 - 230.000}{9 - 10} = \frac{-20.000}{-1} = 20.000$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 70.000 \\ 5 & 115.000 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{345.000 - 350.000}{9 - 10} = \frac{-5.000}{-1} = 5.000$$

Jadi, harga satu porsi ayam penyet adalah Rp20.000,00 dan harga satu gelas Jus adalah Rp5.0000,00.

Notasi Determinan

Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Determinan dari matriks A dapat dinyatakan

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

b. Sifat-Sifat Determinan.

Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ dan matriks $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 8 = 5$$

$$\det(B) = |B| = \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 8 = -5$$

jadi $|A| \times |B| = 25$

Matriks A × B $= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$

$= \begin{pmatrix} -17 & -16 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$

Dengan demikian det $(A \times B) = |AB| = \begin{vmatrix} -17 & -16 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -153 + 128 = -25$

Sifat 2.5

Misalkan matriks *A* dan *B* merupakan matriks persegi berordo *m* × *m* dengan *m* ∈ *N*. Jika determinan matriks *A* dinotasikan $|A|$ dan determinan matriks *B* dinotasikan $|B|$, maka $|AB| = |A|.|B|$.

Contoh 2.8

Gambarkan daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan berikut ini.

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ dan matriks $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Tunjukkan bahwa $|A.B| = |A|.|B|$!

Alternatif Penyelesaian

Sebelum kita menentukan determinan *A.B*, mari kita tentukan terlebih dahulu matriks *A.B*, yaitu:

$$|A.B| = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 28 \\ 20 & 28 \end{bmatrix}.$$

Dengan matriks *A.B* tersebut kita peroleh $|A.B| = \begin{vmatrix} 19 & 28 \\ 20 & 28 \end{vmatrix} = -28$.

Sekarang kita akan bandingkan dengan nilai $|A|.|B|$. Dengan matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ Maka $|A| = 14$, dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ Maka $|B| = -2$ nilai $|A|.|B| = 14.(-2) = -28$

$|A.B| = |A|.|B| = -28$

Soal Tantangan….

- *Selidiki apakah |A.B.C|=|A|.|B|.|C| untuk setiap matriks-matriks A,B, dan C berordo n×n.*
- *Jika matriks A adalah matriks persegi, dan k adalah skalar. Coba telusuri, nilai determinan matriks k.A.*

Contoh 2.9

Sebuah matriks P ordo 2×2 dengan $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dengan $a, b, c, d \in R$.

Jika determinan P adalah α, dengan $\alpha \in R$. Tentukanlah determinan dari matriks $Q = \begin{bmatrix} a & b \\ xc - sa & xd - sb \end{bmatrix}$ dengan $x, y \in R$.

Alternatif Penyelesaian

Jika $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, dan determinan matriks P adalah α, maka berlaku $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = \alpha$

Elemen matriks Q memiliki hubungan dengan matriks P, yaitu:

q_{21}= hasil kali skalar x terhadap p_{21} – hasil kali skalar s terhadap p_{11}.

q_{22}= hasil kali skalar x terhadap p_{22} – hasil kali skalar s terhadap p_{12}.

Tujuan kita sekarang adalah mereduksi matriks Q menjadi kelipatan matriks P. Adapun langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

$$|Q| = \begin{vmatrix} a & b \\ xc - sa & xd - sb \end{vmatrix} \begin{matrix} \rightarrow baris\,1 \\ \rightarrow baris\,2 \end{matrix}$$

Elemen baris 1 matriks Q = elemen baris 1 matriks P. Mereduksi dalam hal ini adalah mengoperasikan elemen baris 2 matriks Q menjadi elemen baris 2 matriks P. Unsur q_{21} dapat dioperasikan menjadi:

$(q_{21})^* = s.q_{11} + q_{21}$, akibatnya kita peroleh:

$$|Q| = \begin{vmatrix} a & b \\ xc & xd \end{vmatrix} \begin{matrix} \rightarrow baris\,1^* \\ \rightarrow baris\,2^* \end{matrix}.$$

Menurut sifat determinan matriks (silahkan minta penjelasan lebih lanjut dari guru Matematika), maka $|Q| = x.\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = x\alpha, \left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \alpha \right)$. jadi $|Q| = x\alpha$

Soal Tantangan….

Misal matriks P adalah matriks berordo 3×3, dengan |P|=α dan matriks Q berordo 3×3 dan mengikuti pola seperti contoh di atas.

Tentukan determinan matriks Q.

Perhatikan kembali matriks A di atas dan ingat kembali menentukan transpose sebuah matriks yang sudah dipelajari, Matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ dan matriks transpose dari matriks $A^t \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Determinan adalah det $\left(A^t\right) = \left|A^t\right| \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 8 = 5$

Perhatikan dari hasil perhitungan det (A) dan det (A^t) diperoleh det(A) = det(A^t).

Sifat 2.5

Misalkan matriks A dan B berordo $m \times m$ dengan $m \in N$. Jika det $(A) = |A|$ dan det $\left(A^{-1}\right) = \left|A^{-1}\right|$ maka

Masalah-2.9

Sebuah perusahaan penerbangan menawarkan perjalanan wisata ke negara A, perusahaan tersebut mempunyai tiga jenis pesawat yaitu Airbus 100, Airbus 200, dan Airbus 300. Setiap pesawat dilengkapi dengan kursi penumpang untuk kelas turis, ekonomi, dan VIP. Jumlah kursi penumpang dari tiga jenis pesawat tersebut disajikan pada tabel berikut.

Kategori	Airbus 100	Airbus 200	Airbus 300
Kelas Turis	50	75	40
Kelas Ekonomi	30	45	25
Kelas VIP	32	50	30

Perusahaan telah mendaftar jumlah penumpang yang mengikuti perjalanan wisata ke negara A seperti pada tabel berikut.

Kategori	Jumlah Penumpang
Kelas Turis	305
Kelas Ekonomi	185
Kelas VIP	206

Berapa banyak pesawat masing-masing yang harus dipersiapkan untuk perjalanan tersebut?

Alternatif Penyelesaian

Untuk memudahkan kita menyelesaikan masalah ini, kita misalkan:

x : banyaknya pesawat Airbus 100

y : banyaknya pesawat Airbus 200

z : banyaknya pesawat Airbus 300

Sistem persamaan yang terbentuk adalah:

$$\left.\begin{matrix} 50x+75y+40z=305 \\ 30x+45y+25z=185 \\ 32x+50y+30z=206 \end{matrix}\right\} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 305 \\ 185 \\ 206 \end{bmatrix}$$

Sebelum ditentukan penyelesaian masalah di atas, terlebih dahulu kita periksa apakah matriks A adalah matriks tak singular.

Cara untuk menentukan det (A), dengan Metode Sarrus. Yaitu sebagai berikut:

Misalnya matriks $A_{3\times3} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_3 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{31}.a_{22}.a_{13} -$$
$$a_{32}.a_{23}.a_{11} - a_{33}.a_{21}.a_{12}$$

Untuk matriks pada Masalah 4.9,

$$\begin{vmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 50 & 75 \\ 30 & 45 \\ 32 & 50 \end{matrix}$$

$$= (50.45.30) + (75.25.32) + (40.30.50) - (32.45.40) -$$
$$(50.25.50) - (30.30.75)$$
$$= -100.$$

Analog dengan persamaan (2), kita akan menggunakan determinan matriks untuk menyelesaikan persoalan di atas.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 305 & 75 & 40 \\ 185 & 45 & 25 \\ 206 & 50 & 30 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{vmatrix}} = \frac{-300}{-100} = 3 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 50 & 305 & 40 \\ 30 & 185 & 25 \\ 32 & 206 & 30 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{vmatrix}} = \frac{-100}{-100} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 50 & 75 & 305 \\ 30 & 45 & 185 \\ 32 & 50 & 206 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{vmatrix}} = \frac{-200}{-100} = 2$$

Oleh karena itu:
banyak pesawat Airbus 100 yang disediakan sebanyak 3 unit
banyak pesawat Airbus 200 yang disediakan sebanyak 1 unit
banyak pesawat Airbus 300 yang disediakan sebanyak 2 unit.

- Analog dengan cara II untuk penyelesaian masalah Pembelian Tiket PRJ, coba kamu selesaikan masalah pengadaan pesawat ini dengan cara yang sama. Mintalah bimbingan dari gurumu.

c. Invers Matriks

Perhatikan Masalah-2.8 di atas, kamu dapat menyelesaikan masalah tersebut dengan cara berikut. Perhatikan sistem persamaan linier yang dinyatakan dalam matriks berikut,

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70000 \\ 115000 \end{pmatrix} \leftrightarrow A.X = B \leftrightarrow X = A^{-1}.B.$$

Karena A adalah matriks tak singular, maka matriks A memiliki invers. Oleh karena itu, langkah berikutnya adalah menentukan matriks X.

$$X = \frac{1}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}} . \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 70000 \\ 115000 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -20000 \\ -5000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20000 \\ 5000 \end{pmatrix}$$

Diperoleh $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20000 \\ -5000 \end{pmatrix}$ x = 20.000 dan y = 5.000

Ditemukan jawaban yang sama dengan cara *I*. Tetapi perlu pertimbangan pemilihan cara yang digunakan menyelesaikan persoalannya.

- Mengajak siswa untuk menemukan aturan untuk menentukan invers sebuah matriks berordo 2 × 2 dengan meninjau kembali langkah-langkah pemecahan masalah di atas. Membuat kesepakatan terkait batasan persyaratan yang diperlukan untuk menentukan invers sebuah matriks.

Misalkan A dan B adalah matriks yang memenuhi persamaan berikut.

$A. X = B$...(4)

Persoalan kita: bagaimana menentukan matriks X pada Persamaan (4)?

Pada teori dasar matriks, bahwa tidak ada operasi pembagian pada matriks, tetapi yang ada adalah invers matriks atau kebalikan matriks. Misalkan A matriks persegi, berordo 2 × 2, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Maka invers matriks A, dinotasikan $A^{(-1)}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{(a.d - b.c)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \text{ dengan } a.d. \neq b.c$$

$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$ disebut adjoint matriks A, dinotasikan $adj(A)$.

Salah satu sifat invers matriks adalah $A^{(-1)}.A = A.A^{(-1)} = I$ Akibatnya persamaan (4) dapat dimodifikasi menjadi:

$A^{-1}.A.X = A^{-1}\,B$. (semua ruas dikalikan A^{-1}).

$(A^{-1}.A).X = A^{-1}\,B$

$I.X = A^{-1}\,B$

$X = A^{-1}\,B$ (karena $I.X = X$)..(5)

Rumusan ini berlaku secara umum, dengan syarat det $(A) \neq 0$, namun ada beberapa teknik yang harus diperhatikan. Untuk selanjutnya akan dikaji pada subbab berikut.

Definisi 2.3

Misalkan A sebuah matriks persegi dengan ordo $n \times n$, $n \in N$.

- Matriks A disebut matriks tidak singular, apabila det$(A) \neq 0$.
- Matriks A disebut matriks singular, apabila det$(A) = 0$.
- A^{-1} disebut invers matriks A jika dan hanya jika $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, dengan I adalah matriks identitas perkalian matriks.

Masalah-2.10

Agen perjalanan Sumatera Holidays menawarkan paket perjalanan ke Danau Toba, yaitu menginap di Inna Parapat Hotel, transportasi ke tiap tempat wisata, dan makan di Singgalang Restaurant. Paket perjalanan yang ditawarkan yaitu Paket I terdiri 4 malam menginap, 3 tempat wisata dan 5 kali makan dengan biaya Rp2.030.000,00. Paket II dengan 3 malam menginap, 4 tempat wisata dan 7 kali makan dengan biaya Rp1.790.000,00. Paket III dengan 5 malam menginap, 5 tempat wisata dan 4 kali makan dengan biaya Rp2.500.000,00. Berapakah biaya sewa hotel tiap malam, satu kali transportasi dan satu kali makan?

Alternatif Penyelesaian

Misalkan

x : biaya sewa hotel

y : biaya untuk transportasi

z : biaya makan

	Paket 1	Paket 2	Paket 3
Sewa hotel	4	3	5
Transportasi	3	4	5
Makan	5	7	4
Biaya Total	2.030.000	1.790.000	2.500.000

Dalam bentuk matriks adalah seperti berikut :

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2030000 \\ 1790000 \\ 2500000 \end{bmatrix}$$

Determinan untuk matriks masalah 2.10 di atas :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 4 \end{bmatrix} \text{ Maka det } A = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{matrix}$$

$$= (4 \times 4 \times 4) + (3 \times 5 \times 5) + (5 \times 3 \times 7) - (5 \times 4 \times 5) - (4 \times 5 \times 7)$$
$$-(3 \times 3 \times 4) = -32$$

$$x = \frac{\begin{bmatrix} 2030000 & 3 & 5 \\ 1790000 & 4 & 5 \\ 2500000 & 7 & 4 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 4 \end{bmatrix}} = -\frac{17520000}{-32} = 547500$$

$$y = \frac{\begin{bmatrix} 4 & 2030000 & 5 \\ 3 & 1790000 & 5 \\ 5 & 2500000 & 4 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 4 \end{bmatrix}} = -\frac{18960000}{-32} = 592500$$

$$z = \frac{\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2030000 \\ 3 & 4 & 1790000 \\ 5 & 7 & 2500000 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 4 \end{bmatrix}} = -\frac{3740000}{-32} = 116875$$

Oleh karena itu, biaya sewa hotel tiap malam adalah Rp547.500,00; biaya transportasi adalah Rp592.500,00; dan biaya makan adalah Rp116.875,00

Cobalah kamu selesaikan masalah tersebut dengan cara menentukan invers matriks. Mintalah bimbingan dari gurumu.

d. Metode Kofaktor

Terlebih dahulu kamu memahami tentang minor suatu matriks. Minor suatu matriks *A* dilambangkan dengan M_{ij} adalah determinan matriks bagian dari *A* yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke-*i* dan kolom ke-*j*.

Jika *A* adalah sebuah matriks bujur sangkar berordo $n \times n$, maka minor elemen a_{ij} yang dinotasikan dengan M_{ij}, didefinisikan sebagai determinan dari sub matriks *A* berordo $(n\text{-}1) \times (n\text{-}1)$ setelah baris ke-*i* dan kolom ke-*j* dihilangkan.

Misalkan matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

minor elemen a_{11} adalah $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

sehingga $M_{11} \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

M_{11}, M_{12}, dan M_{13} merupakan submatriks hasil ekspansi baris ke–1 dari matriks A. Matriks kofaktor matriks A dilambangkan

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \text{ dan } c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{11}) = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = -19$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 13 \qquad c_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 1$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 23$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -9 \qquad c_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -13$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -5$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -5 \qquad c_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 7$$

Dari masalah di atas diperoleh matriks kofaktor A, dengan menggunakan rumus :

$$C(A) = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -19 & 13 & 1 \\ 23 & -9 & -13 \\ -5 & -5 & 7 \end{bmatrix}$$

Matriks adjoin dari matriks A adalah transpose dari kofaktor-kofaktor matriks tersebut, dilambangkan dengan $adj(A) = (C_{ij})^t$, yaitu:

$$Adj(\mathrm{A}) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}^t = \begin{bmatrix} -19 & 23 & -5 \\ 13 & -9 & -5 \\ 1 & -13 & 7 \end{bmatrix}$$

Dari masalah 2.10 di atas, diperoleh inver matriks A. Dengan rumus :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} adj(A)$$

Sehingga: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} adj(\text{A}) = \frac{1}{-32}\begin{pmatrix} -19 & 23 & -5 \\ 13 & -9 & -5 \\ 1 & -13 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{32} & \frac{-23}{32} & \frac{5}{32} \\ \frac{-13}{32} & \frac{9}{32} & \frac{5}{32} \\ \frac{-1}{32} & \frac{13}{32} & \frac{-7}{32} \end{pmatrix}$

Berdiskusilah dengan temanmu satu kelompok, coba tunjukkan bahwa $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, dengan I adalah matriks identitas 3 × 3.

Bentuk matriks permasalahan 2.10 adalah $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2030000 \\ 1790000 \\ 2500000 \end{pmatrix}$

Bentuk ini dapat kita nyatakan dalam bentuk persamaan $AX = B$. Untuk memperoleh matriks X yang elemen-elemennya menyatakan biaya sewa hotel, biaya transportasi dan biaya makan, kita kalikan matriks A^{-1} ke ruas kiri dan ruas kanan persamaan $AX = B$, sehingga diperoleh

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{19}{-13} & \frac{-23}{32} & \frac{5}{32} \\ \frac{-13}{32} & \frac{9}{32} & \frac{5}{32} \\ \frac{-1}{32} & \frac{13}{32} & \frac{-7}{32} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2030000 \\ 1790000 \\ 2500000 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 547500 \\ 592500 \\ 116875 \end{pmatrix}$$

Hasil yang diperoleh dengan menerapkan cara determinan dan cara invers, diperoleh hasil yang sama, yaitu; biaya sewa hotel tiap malam adalah Rp547.500,00; biaya transportasi adalah Rp592.500,00; dan biaya makan adalah Rp116.875,00.

Berdasarkan langkah-langkah pemecahan masalah di atas, dapat disimpulkan

Sifat 2.6

Misalkan matriks A berordo n × n dengan n ∈ N. Jika det(A) ≠ 0, $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}$ *adj* (A)dan $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, I adalah matriks identitas perkalian matriks

e. Sifat-Sifat Invers Matriks

Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$det(A) = 2(-2) - 1(-3) = -1$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A) = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = \frac{1}{\det(A^{-1})} adj(A^{-1}) = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = A$$

Perhatikan uraian di atas diperoleh bahwa $(A^{-1})^{-1} = A$.

Coba buktikan sifat berikut setelah kamu mempelajari invers matriks

Sifat 2.7

Misalkan matriks A dan B berordo $m \times m$ dengan $m \in$ N. Jika det $(A) = |A|$ dan det $(A^{-1}) = |A^{-1}|$ maka $|A^{-1}| = 1/|A|$

Sifat 2.8

Misalkan matriks A dan B berordo $m \times m$ dengan $m \in$ N. det(A) ≠ 0, Jika A^{-1} adalah invers matriks A, maka $(A^{-1})^{-1} = A$.

Perhatikan pertanyaan, apakah $(AB)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$

Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

det (A) = 2(-2) – 1(-3) = -1

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A) = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

det (B) = 0(-2) – 3(-1) = 3

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} adj(B) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Dengan demikian dipereloh det(AB) = -3 – 0 = -3.

Selanjutnya, $(AB)^{-1} = \frac{1}{\det(AB)} Adj(AB) = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$$(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Dari perhitungan di atas diperoleh $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Sifat 2.9

Misalkan matriks A dan B berordo $n \times n$ dengan $n \in N$. det(A) ≠ 0 dan det(B) ≠ 0, Jika A^{-1} dan B^{-1} adalah invers matriks A, dan B maka $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

- Coba kamu diskusikan dengan temanmu satu kelompok, apakah $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$. Jika tidak, beri alasannya!.

Uji Kompetensi 2.2

1. Misalkan A sebarang matriks persegi. Jika pertukaran elemen-elemen sebarang dua baris atau dua kolom dari matriks A, maka buktikan bahwa nilai determinannya berubah tanda.

2. Misalkan A sebarang matriks persegi. Buktikan bahwa jika semua unsur dalam suatu baris (atau kolom) matriks A dikalikan dengan sebuah bilangan $k \in R$, maka determinannya juga dikalikan dengan bilangan itu.

3. Jika B matriks persegi dengan det $(B) \times 0$, tunjukkan bahwa $\left[B^t\right]^{-1} = \left[B^{-1}\right]^t$.

4. Selidiki bahwa det (K^n)=(det K $)^n$, untuk matriks;

   a) $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ dengan $n = 2$

   b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{bmatrix}$ dengan $n = 6$

5. Diketahui $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ = -8, tentukanlah:

   a) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$

   b) $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix}$!

6. Tentukanlah nilai z yang memenuhi persamaan berikut!

$$\begin{vmatrix} z & -3 \\ 3 & 1-z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & z & -6 \\ 1 & 3 & z-5 \end{vmatrix}.$$

7. Selidiki bahwa det $(C + D)$=det C + det D ! untuk setiap matrik C dan D merupakan matriks persegi. i.

8. Diberikan matriks M adalah matriks berordo 2×2, dengan $|M| \neq 0$. Tentukan hubungan $|M|$ dengan det (M^{-1}). Coba kamu generalisasikan untuk matriks M berordo $n \times n$!

9. Tentukanlah nilai z yang memenuhi persamaan berikut ini!

$$\begin{vmatrix} z & -1 \\ 3 & 1-z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & z & -6 \\ 1 & 3 & z-5 \end{vmatrix}$$

10. Jika semua elemen baris ke-1 suatu matriks persegi adalah nol. Tentukanlah determinan matriks tersebut!

11. Diketahui matriks R adalah matriks berordo $n \times n$ dengan semua elemen kolom ke-1 adalah nol. Tentukanlah determinan matriks tersebut. Berikan juga contohnya!

12. Periksalah kebenaran setiap pernyataan berikut ini. Berikanlah contoh penyangkal untuk setiap pernyataan yang tidak berlaku!
    a) $\det(2A)=2.\det(A)$
    b) $|A^2|=|A|^2$
    c) $\det(I+A)=1+\det(A)$

13. Misalkan matriks-matriks P dan Q adalah matriks berordo $n \times n$, dengan $PQ \neq QP$. Apakah $\det(PQ) = \det(QP)$? Jelaskan!

14. Masalah Nutrisi
    Winarno bermaksud mengikuti ujian saringan masuk perwira. Setelah berkonsultasi dengan seorang perwira dan memperoleh saran mengenai pola makan yang hendak dikonsumsi lebih baik dimasak sendiri. Pengalaman perwira tersebut menyarankan untuk mencampurkan dua sumber zat gizi dalam jumlah yang berbeda untuk menghasilkan tiga jenis biskuit. Jumlah (dalam satuan gram) kalsium, protein, dan karbohidrat dalam setiap sumber gizi ditunjukkan oleh matriks G, dan jumlah (dalam satuan gram) setiap sumber zat gizi yang dikonsumsi dalam setiap biskuit ditunjukkan oleh matriks J.

$$G = \begin{bmatrix} 12 & 16 \\ 32 & 24 \\ 20 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Kalsium} \\ \text{Protein} \\ \text{Karbohidrat} \end{matrix}$$

(kolom: Sumber I, Sumber II)

$$J = \begin{bmatrix} 24 & 18 & 25 \\ 25 & 32 & 16 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Sumber I} \\ \text{Sumber II} \end{matrix}$$

(kolom: Biskuit a, Biskuit b, Biskuit c)

a) Tentukanlah jumlah kalsium dalam biskuit B!
b) Hitunglah $G.J$ dan jelaskan arti setiap elemen matriks tersebut!

15. Masalah alokasi sumber daya.
    Agen perjalanan menawarkan paket perjalanan ke Bali. Paket I terdiri 4 malam menginap, 3 tempat wisata dan 5 kali makan. Paket II dengan 3 malam menginap, 4 tempat wisata dan 7 kali makan. Paket III dengan 5 malam menginap, 4 tempat wisata dan tidak ada makan. Sewa hotel Rp400.000,00 per malam, tranprotasi ke tiap tempat wisata Rp80.000,00, dan makan di restoran yang ditunjuk Rp90.000,00.
    Nyatakan matriks harga sewa hotel, tranportasi dan makan.
    Nyatakan matriks paket yang ditawarkan.
    Dengan menggunakan perkalian matriks, tentukan matriks biaya untuk tiap paket.
    Paket mana yang menawarkan biaya termurah?

16. Masalah Persediaan Toko Cat.
    Sebuah toko penjual cat eceran memiliki persedian tiga jenis cat eksterior yaitu regular, deluxe, dan commercial. Cat-cat tersebut tersedia dalam empat pilihan warna yaitu, biru, hitam, kuning, dan coklat. Banyak penjualan cat (dalam gallon) selama satu minggu dicatat dalam matriks R, sedangkan inventaris toko pada awal minggu dalam matriks S berikut ini.

(kolom: Biru, Hitam, Kuning, Cokelat)

$$R = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 8 & 6 \\ 6 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textit{Regular} \\ \textit{Deluxe} \\ \textit{Commercial} \end{matrix}$$

(kolom: Biru, Hitam, Kuning, Cokelat)

$$R = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textit{Regular} \\ \textit{Deluxe} \\ \textit{Commercial} \end{matrix}$$

a) Tentukan inventaris toko pada akhir minggu

b) Jika toko tersebut menerima kiriman stok baru yang dicatat dalam matriks T. Tentukan inventaris toko yang baru.

17. Dengan menggunakan matriks persegi, tunjukkan bahwa $(B^{-1})^{-1} = B$ dan $[B^{t\,-1}]=[B^{-1}]^{t}$!

18. Tentukanlah determinan dari matriks

$$M=\begin{bmatrix} n^2 & (n+1)^2 & (n+2)^2 \\ (n+1)^2 & (n+2)^2 & (n+3)^2 \\ (n+2)^2 & (n+3)^2 & (n+4)^2 \end{bmatrix}!$$

19. Diberikan suatu sistem persamaan linier dua variabel

$$x+y=3$$

$$2x-y=0$$

20. Tentukanlah nilai x dan y yang memenuhi sistem tersebut dengan menggunakan konsep matriks.

D. PENUTUP

Setelah telah selesai membahas materi matriks di atas, ada beberapa hal penting sebagai kesimpulan yang dijadikan pengangan dalam mendalami dan membahas materi lebih lanjut, antara lain:

1. Penjumlahan sebarang matriks dengan matriks identitas penjumlahan hasilnya matriks itu sendiri. Matriks identitas penjumlahan adalah matriks nol.

2. Dalam operasi penjumlahan dua matriks berlaku sifat komutatif dan assosiatif, misal jika A dan B adalah matriks, maka

   a. $\underbrace{A+A+A+\cdots+A}_{k} = kA$

   b. $A + B = B + A$

   c. $A + I = I + A$, dengan I adalah matriks identitas penjumlahan matriks

   d. $A + (B + C) = (A + B) + C$

3. Hasil kali sebuah matriks dengan suatu skalar atau suatu bilangan real k akan menghasilkan sebuah matriks baru yang berordo sama dan memiliki elemen-elemen k kali elemen-elemen matriks semula.

4. Dua matriks hanya dapat dikalikan apabila banyaknya kolom matriks yang dikali sama dengan banyaknya baris matriks pengalinya.

5. Matriks A dan B dapat dikalikan apabila banyak kolom matriks A sama dengan banyak baris matriks B. Hasil kali matriks A dan B menghasilkan matriks C yang elemen-elemennya merupakan hasil kali elemen baris matriks A dan elemen kolom matriks B, ditulis $A_{p \times q} \times B_{q \times r} = C_{p \times r}$.

6. Hasil perkalian matriks A dengan matriks identitas, hasilnya adalah matriks A.

7. Perkalian dua atau lebih matriks, tidak memenuhi sifat komutatif. Tetapi perkalian matriks memenuhi sifat asosiatif.

8. Matriks yang memiliki invers adalah matriks persegi dengan nilai determinannya tidak nol (0).

Bab 3

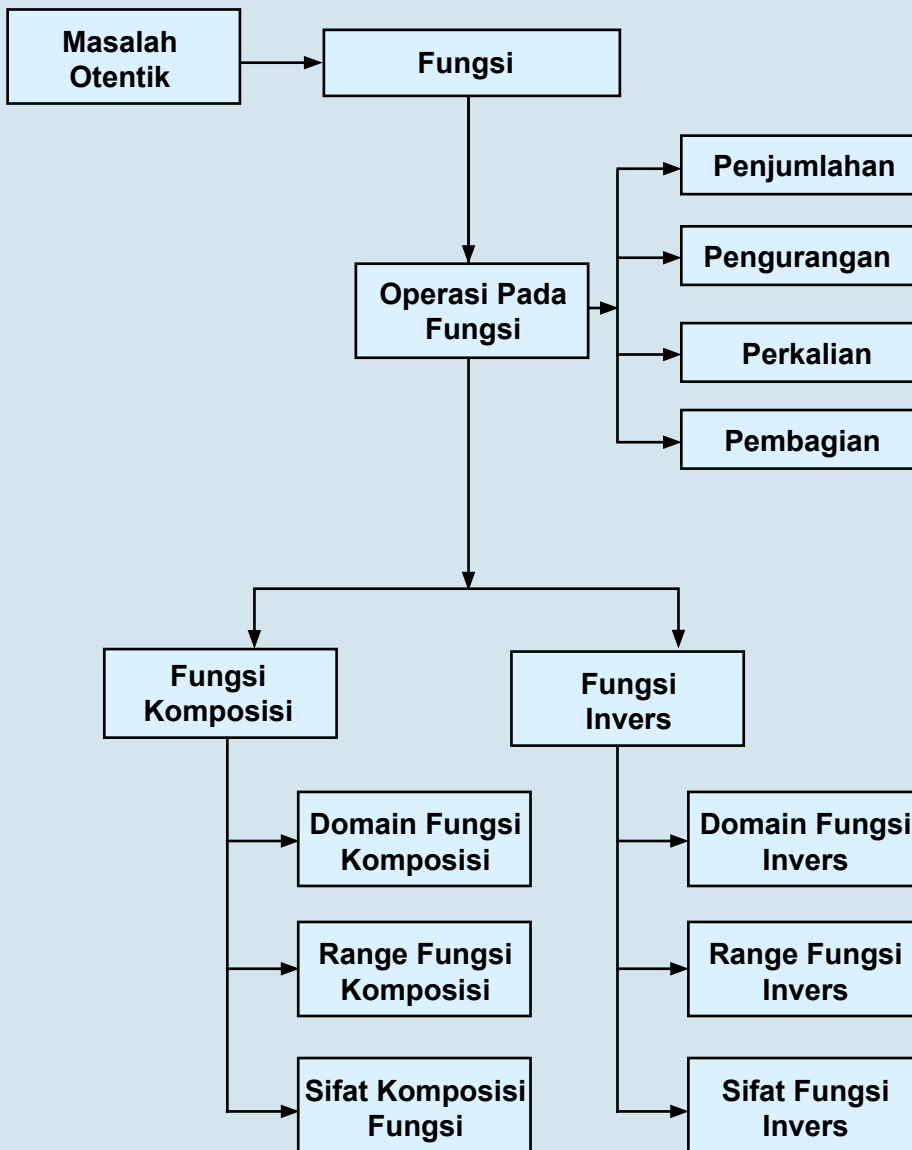
FUNGSI KOMPOSISI DAN FUNGSI INVERS

A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
1. Mendeskripsikan konsep fungsi dan menerapkan operasi aljabar (penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian) pada fungsi. 2. Menganalisis konsep dan sifat suatu fungsi dan melakukan manipulasi aljabar dalam menentukan invers fungsi dan fungsi invers. 3. Mendeskripsikan dan menganalisis sifat suatu fungsi sebagai hasil operasi dua atau lebih fungsi yang lain. 4. Mendeskripsikan konsep komposisi fungsi dengan menggunakan konteks sehari-hari dan menerapkannya. 5. Mengolah data masalah nyata dengan menerapkan aturan operasi dua fungsi atau lebih dan menafsirkan nilai variabel yang digunakan untuk memecahkan masalah. 6. Memilih strategi yang efektif dan menyajikan model matematika dalam memecahkan masalah Nyata terkait fungsi invers dan invers fungsi. 6. Merancangdan mengajukan masalah dunia nyata yang berkaitan dengan Komposisi fungsi dan menerapkan berbagai aturan dalam menyelesaikannya.	Melalui pembelajaran materi fungsi komposisi dan fungsi invers, siswa memperoleh pengalaman belajar: • Menjelaskan karakteristik masalah autentik yang penyelesaiannya terkait dengan fungsi komposisi dan fungsi invers. • Merancang model matematika dari permasalahan autentik yang merupakan fungsi komposisi dan fungsi invers. • Menyelesaikan model matematika untuk memperoleh solusi permasalahan yang diberikan. • Menginterpretasikan hasil penyelesaian masalah yang diberikan. • Menuliskan konsep fungsi komposisi dan fungsi invers berdasarkan ciri-ciri yang ditemukan dengan bahasanya sendiri.

Istilah Penting

- *Fungsi*
- *Fungsi komposisi*
- *Fungsi invers*

B. PETA KONSEP

C. MATERI PEMBELAJARAN

Pada Bab 5 kelas X, kita telah mempelajari konsep relasi dan fungsi. Konsep tersebut merupakan materi prasyarat dalam mempelajari materi pada bab ini. Kita mempelajari dan menemukan konsep fungsi komposisi dan fungsi invers dengan melakukan pengamatan dan pemahaman pada beberapa masalah dan contoh. Pertama sekali, mari kita memahami operasi aljabar pada fungsi.

1. Operasi Aljabar Pada Fungsi

Pada subbab ini, kita akan mempelajari operasi aljabar (penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian pada fungsi). Perhatikan masalah berikut.

Masalah-3.1

Seorang photografer dapat menghasilkan gambar yang bagus melalui dua tahap, yaitu; tahap pemotretan dan tahap *editing*. Biaya yang diperlukan pada tahap pemotretan (B_1) adalah Rp500,- per gambar, mengikuti fungsi: $B_1(g)$ = 500g + 2500 dan biaya pada tahap *editing* (B_2) adalah Rp100,- per gambar, mengikuti fungsi: $B_2(g) = 100g + 500$, dengan g adalah banyak gambar yang dihasilkan.

a) Berapakah total biaya yang diperlukan untuk menghasilkan 10 gambar dengan kualitas yang bagus?
b) Tentukanlah selisih antara biaya pada tahap pemotretan dengan biaya pada tahap *editing* untuk 5 gambar.

Alternatif Penyelesaian

Fungsi biaya pemotretan: $B_1(g) = 500g + 2500$

Fungsi biaya editing: $B_2(g) = 100g + 500$

a) Untuk menghasilkan gambar yang bagus, harus dilalui 2 tahap proses yaitu pemotretan dan *editing*, sehingga fungsi biaya yang dihasilkan adalah:

$$B_1(g) + B_2(g) = (500g + 2500) + (100g + 500)$$
$$= 600g + 3000$$

Total biaya untuk menghasilkan 10 gambar ($g = 10$) adalah:

$$B_1(g) + B_2(g) = 600g + 3000$$
$$B_1(10) + B_2(10) = (600 \times 10) + 3000$$
$$= 9000$$

Jadi total biaya yang diperlukan untuk menghasilkan 10 gambar dengan kualitas yang bagus adalah Rp9000,-

b) Selisih biaya tahap pemotretan dengan tahap *editing* adalah:

$B_1(g) - B_2(g) = (500g + 2500) - (100g + 500)$
$= 400g + 2000$

Selisih biaya pemotretan dengan biaya *editing* untuk 5 gambar ($g = 5$) adalah:

$B_1(g) - B_2(g) = 400g + 2000$
$B_1(5) - B_2(5) = (400 \times 5) + 2000$
$= 4000$

Jadi selisih biaya yang diperlukan untuk menghasilkan 5 gambar dengan kualitas yang bagus adalah Rp4000,-

Perhatikan jumlah biaya pada bagian (a) dan selisih biaya pada bagian (b).

$B_1(g) = 500g + 2500$ sehingga $B_1(5) = 5000$ dan $B_1(10) = 7500$.

$B_2(g) = 100g + 500$ sehingga $B_2(5) = 1000$ dan $B_2(10) = 1500$

$B_J(g) = B_1(g) + B_2(g) = 600g + 3000$ sehingga $B_J(10) = 9000$ dan $B_1(10) + B_2(10) = 7500 + 1500 = 9000$

Demikian juga,

$B_S(g) = B_1(g) - B_2(g) = 400g + 2000$ sehingga $B_S(5) = 4000$ dan $B_1(5) - B_2(5) = 5000 - 1000 = 4000$.

Definisi 3.1

Jika f suatu fungsi dengan daerah asal D_f dan g suatu fungsi dengan daerah asal D_g, maka pada operasi aljabar penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian dinyatakan sebagai berikut.

a) Jumlah f dan g ditulis $f + g$ didefinisikan sebagai
$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ dengan daerah asal $D_{f+g} = D_f \cap D_g$.

b) Selisih f dan g ditulis $f - g$ didefinisikan sebagai
$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ dengan daerah asal $D_{f-g} = D_f \cap D_g$.

c) Perkalian f dan g ditulis $f \times g$ didefinisikan sebagai
$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ dengan daerah asal $D_{f\times g} = D_f \cap D_g$.

d) Pembagian f dan g ditulis $\frac{f}{g}$ didefinisikan sebagai $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

dengan daerah asal $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$.

Contoh 3.1

Diketahui fungsi $f(x) = x + 3$ dan $g(x) = x^2 - 9$. Tentukanlah fungsi-fungsi berikut dan tentukan pula daerah asalnya!

a) $(f + g)(x)$

b) $(f + g)(x)$

c) $(f \times g)(x)$

d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

Alternatif Penyelesaian

Daerah asal fungsi $f(x) = x + 3$ adalah $D_f = \{x | x \in R\}$ dan daerah asal fungsi $g(x) = x^2 - 9$ adalah $D_g = \{x | x \in R\}$

a) $$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$= (x+3) + (x^2 - 9)$$
$$= x^2 + x - 6$$

Daerah asal fungsi $(f + g)(x)$ adalah:

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g$$
$$= \{x | x \in R\} \cap \{x | x \in R\}$$
$$= \{x | x \in R\}$$

b) $$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$= (x+3) - (x^2 - 9)$$
$$= -x^2 + x + 12$$

Daerah asal fungsi $(f - g)(x)$ adalah:

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g$$
$$= \{x | x \in R\} \cap \{x | x \in R\}$$
$$= \{x | x \in R\}$$

c) $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$
$= (x + 3) \times (x^2 - 9)$
$= x^3 + 3x^2 - 9x - 27$

Daerah asal fungsi $(f \times g)(x)$ adalah

$$\begin{aligned} D_{f\times g} &= D_f \cap D_g \\ &= \{x | x \in R\} \cap \{x | x \in R\} \\ &= \{x | x \in R\} \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \\ &= \frac{x+3}{x^2-9} \\ &= \frac{x+3}{(x+3)\times(x-3)} \\ &= \frac{1}{x-3},\ x \neq -3,\ x \neq 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{\frac{f}{g}} &= D_f \cap D_g dan\ g(x) \neq 0 \\ &= \{x | x \in R\} \cap \{x | x \in R\} dan\ x^2 - 9 \neq 0 \\ &= \{x | x \in R\} dan (x+3)(x-3) \neq 0 \\ &= \{x | x \in R\} dan\ x \neq -3, x \neq 3 \\ &= \{x | x \in R,\ x \neq -3, x \neq 3\} \end{aligned}$$

Latihan

Diketahui fungsi $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ dan $g(x) = \sqrt{x - 2}$. Tentukanlah fungsi-fungsi berikut dan tentukan pula daerah asalnya!

a) $(f + g)(x)$
b) $(f - g)(x)$
c) $(f \times g)(x)$
d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

2. Menemukan Konsep Fungsi Komposisi

Setelah kita memahami operasi aljabar pada fungsi, maka pada subbab ini, kita akan membicarakan fungsi komposisi dari suatu fungsi. Untuk mendapatkan konsep fungsi komposisi, kamu pahami dan pelajarilah beberapa masalah kasus dan contoh-contoh berikut.

Masalah-3.2

Suatu bank di Amerika menawarkan harga tukar Dollar Amerika (USD) ke Ringgit Malaysia (MYR), yaitu; 1 USD = 3,28 MYR, dengan biaya penukaran sebesar 2 USD untuk setiap transaksi penukaran. Kemudian salah satu bank di Malaysia menawarkan harga tukar ringgit Malaysia (MYR) ke Rupiah Indonesia (IDR), yaitu; 1 MYR = Rp3.169,54, dengan biaya penukaran sebesar 3 MYR untuk setiap transaksi penukaran.
Seorang turis asal Amerika ingin bertamasya ke Malaysia kemudian melanjutkannya ke Indonesia dengan membawa uang sebesar 2.000 USD. Berapa IDR akan diterima turis tersebut jika pertama dia menukarkan semua uangnya ke mata uang Ringgit Malaysia di Amerika dan kemudian menukarnya ke Rupiah Indonesia di Malaysia?

Alternatif Penyelesaian

Masalah ini dapat diselesaikan dua tahap penukaran.

Langkah 1:
Uang sebesar 2.000 USD akan ditukar ke Ringgit Malaysia di Amerika dengan biaya penukaran sebesar 2 USD, maka jumlah uang yang diterima turis tersebut adalah:

$(2.000 - 2) \times 3,28$ MYR $= 1.998 \times 3,28$ MYR $= 6.553,44$ MYR

Langkah 2:
Uang sebesar 6.553,44 MYR akan ditukar ke mata uang Rupiah Indonesia, dan perlu di ingat bahwa biaya penukaran sebesar 3 MYR. Uang yang diterima turis tersebut adalah:

$(6.553,44 - 3) \times 3.169,54 = 6.550,44 \times 3.169,54 = 20.761.881,60$ IDR

Turis tersebut menerima uang rupiah Indonesia sebesar 20.761.881,60 IDR.
Perhitungan kedua transaksi di atas dapat kita buat model matematikanya ke dalam dua fungsi sebagai berikut.

Misalkan :

t = jumlah uang dalam USD

x = jumlah uang dalam MYR

y = jumlah uang dalam IDR

Transaksi penukaran pertama dapat kita tuliskan dengan

$x = 3{,}28\ (t - 2)$

$x = 3{,}28\ t - 6{,}56$

karena x merupakan sebuah fungsi t, maka dapat ditulis:

$x\ (\mathrm{t}) = 3{,}28\ t - 6{,}56$ .... (1)

Untuk transaksi penukaran kedua dapat ditulis sebagai berikut.

$y = 3.169{,}54\ (x - 3)$

$y = 3.169{,}54\ x - 9.508{,}62$

karena y fungsi dari x, maka dapat ditulis

$y\ (x) = 3.169{,}54\ x - 9.508{,}62$ ....(2)

Dengan mensubstitusi persamaan 1 ke persamaan 2 kita peroleh:

$y\ (x) = y(x(t))$, misal $f\ (t) = y(x(t))$, maka

$$\begin{aligned} f\ (t) &= y(x(t)) \\ &= 3.169{,}54\ (3{,}28\ t - 6{,}56) - 9.508{,}62 \\ &= 10.396{,}09\ t - 20792.18 - 9.508{,}62 \\ f\ (t) &= 10.396{,}09\ t - 30.300{,}80 \end{aligned}$$

Fungsi $f(t) = y(x(t))$ ini merupakan fungsi komposisi x dan y dalam t yang dilambangkan dengan $(y \circ x)(t)$ dan didefinisikan dengan $(y \circ x)(t) = y(x(t))$.

Maka fungsi komposisi x dan y pada masalah di atas adalah

$(y \circ x)\ (t) = 10.396{,}09\ \mathrm{t} - 30.300{,}80$ ....(3)

Dengan menggunakan fungsi komposisi $(y \circ x)(t)$ seperti pada persamaan 3, maka dapat kita hitung jumlah uang turis tersebut dalam mata uang rupiah Indonesia untuk t = 2000 USD seperti berikut.

$$\begin{aligned}(y \circ x)(t) &= 10.396{,}09\, t - 30.300{,}80 \\ &= 10.396{,}09 \times (2.000) - 30.300{,}80 \\ &= 20.792.180 - 30.300{,}80 \\ &= 20.761.881{,}60\end{aligned}$$

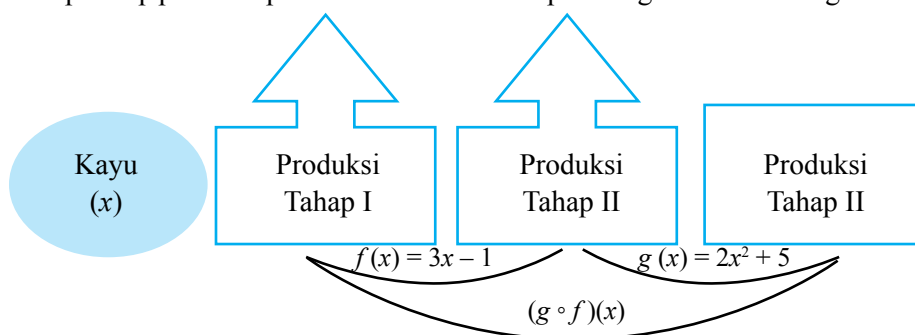
Jumlah uang turis tersebut dalam rupiah adalah Rp20.761.881,60 Perhatikan bahwa hasilnya sama dengan langkah pertama yang kita lakukan.

Agar kamu lebih memahami fungsi komposisi, perhatikanlah masalah berikut.

Masalah-3.3

Suatu pabrik kertas berbahan dasar kayu memproduksi kertas melalui dua tahap. Tahap pertama dengan menggunakan mesin I yang menghasilkan bahan kertas setengah jadi, dan tahap kedua dengan menggunakan mesin II yang menghasilkan kertas. Dalam produksinya mesin I menghasilkan bahan setengah jadi dengan mengikuti fungsi $f(x) = 0{,}9x - 1$ dan mesin II mengikuti fungsi $g(x) = 0{,}02x^2 - 2{,}5x$, dengan x merupakan banyak bahan dasar kayu dalam satuan ton. Jika bahan dasar kayu yang tersedia untuk suatu produksi sebesar 200 ton, berapakah kertas yang dihasilkan? (kertas dalam satuan ton).

Alternatif Penyelesaian

Tahap-tahap produksi pabrik kertas tersebut dapat kita gambarkan sebagai berikut.

Gambar 3.1. Tahapan Produksi Pabrik Kertas

Dari Gambar 3.1. di atas, terlihat jelas bahwa tahap produksi kertas terdiri atas dua tahap. Hasil produksi setiap tahap kita hitung sebagai berikut

Hasil produksi tahap I

Rumus fungsi pada produksi tahap I adalah: $f(x) = 0{,}9x - 1$

Untuk $x = 200$, diperoleh:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0{,}9x - 1 \\ &= 0{,}9(200) - 1 \\ &= 179 \end{aligned}$$

Maka hasil produksi tahap I adalah 179 ton bahan kertas setengah jadi.

Hasil produksi tahap II

Rumus fungsi pada produksi tahap II adalah: $g(x) = 0{,}02x^2 - 2{,}5x$

Karena hasil produksi pada tahap I akan dilanjutkan pada produksi tahap II, maka hasil produksi tahap I menjadi bahan dasar produksi tahap II, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} g(x) &= 0{,}02x^2 - 2{,}5x \\ &= 0{,}02(200)^2 - 2{,}5(200) \\ &= 640{,}82 - 447{,}5 \\ &= 193{,}32 \end{aligned}$$

Dengan demikian hasil produksi tahap II adalah 193,32 ton bahan jadi kertas.

Hasil produksi yang dihasilkan pabrik kertas tersebut jika bahan dasar kayunya sebanyak 200 ton adalah 193,32 ton bahan jadi kertas.

Masalah 3.3 di atas dapat kita selesaikan dengan menggunakan cara yang berbeda sebagai berikut.

Diketahui fungsi-fungsi produksi berikut.

$f(x) = 0{,}9x - 1$ ....(1)

$g(x) = 0{,}02x^2 - 2{,}5x$ ....(2)

dengan mensubstitusikan pers. 1 ke persamaan 2, kita peroleh fungsi

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= 0{,}02(0{,}9x - 1)^2 - 2{,}5(0{,}9x - 1) \\ &= 0{,}02(0{,}81x^2 - 1{,}8x+1) - 2{,}5(0{,}9x - 1) \\ &= 0{,}0162\,x^2 - 0{,}036x + 0{,}02 - 2{,}25x + 2{,}5 \\ &= 0{,}0162\,x^2 - 2{,}286x + 2{,}52 \end{aligned}$$

Kita peroleh fungsi $g(f(x)) = 0{,}0162\,x2 - 2{,}286x + 2{,}52$ ....(3)

Jika disubstitusikan nilai $x = 200$ ke persamaan 3, kita peroleh:

$$g(f(x)) = 0{,}0162\,x^2 - 2{,}286x + 2{,}52$$

$= 0{,}0162\ (200)^2 – 2{,}286(200) + 2{,}52$

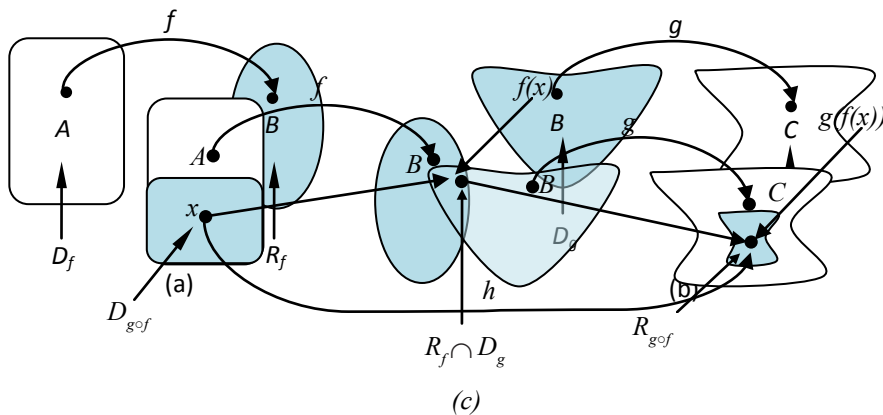
$= 648 – 457{,}2 + 2{,}52$

$= 193{,}32$

Terlihat bahwa hasil produksi sebesar 193,32 ton. Nilai ini sama hasilnya dengan hasil produksi dengan menggunakan perhitungan cara pertama di atas.

Nilai $g(f(x))$ merupakan nilai suatu fungsi yang disebut fungsi komposisi f dan g dalam x yang dilambangkan dengan $g \circ f$. Karena itu nilai $g \circ f$ di x ditentukan dengan $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Perhatikan Gambar 3.2 berikut.

(c)

Gambar 3.2. Fungsi Komposisi

Berdasarkan Gambar 3.2 di atas dapat dikemukakan beberapa hal berikut.

1) D_f = daerah asal fungsi f; R_f= daerah hasil fungsi f; D_g = daerah asal fungsi g; R_g = daerah hasil fungsi g; $D_{g \circ f}$ = daerah asal fungsi komposisi $g \circ f$; = daerah hasil fungsi komposisi $g \circ f$
2) Fungsi f memetakan himpunan A ke himpunan B, ditulis $f: A \rightarrow B$.
   Setiap unsur $x \in D_f$ dipetakan ke $y \in R_f$ dengan fungsi $y = f(x)$. Perhatikan Gambar 3.2(a).
3) Fungsi g memetakan himpunan B ke himpunan C, ditulis $g : B \rightarrow C$.
   Setiap unsur $y \in D_g$ dipetakan ke $z \in R_g$ dengan fungsi $z = g(y)$. Perhatikan Gambar 3.2(b).
4) Fungsi h memetakan himpunan A ke himpunan C melalui himpunan B, ditulis: $h: A \rightarrow C$. Setiap unsur $x \in D_h$ dipetakan ke $z \in h$ dengan fungsi $z = h(x)$. Perhatikan Gambar 3.2(c).

Berdasarkan beberapa hal di atas kita peroleh definisi berikut.

Definisi 3.2

Jika *f* dan g fungsi dan $R_f \cap D_g \neq \varnothing$, maka terdapat suatu fungsi *h* dari himpunan bagian D_f ke himpunan bagian R_g yang disebut fungsi komposisi *f* dan *g* (ditulis: $g \circ f$) yang ditentukan dengan

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

daerah asal fungsi komposisi *f* dan *g* adalah, $D_{f \circ g} = \{ x \in D_f \mid f(x) \in D_g \}$
dengan
D_f = daerah asal (domain) fungsi *f*; D_g = daerah asal (*domain*) fungsi *g*;
R_f = daerah hasil (range) fungsi *f*; R_g = daerah hasil (*range*) fungsi *g*.

Pertanyaan kritis!
Untuk fungsi komposisi *f* dan *g* atau $g \circ f$.

1) Apa akibatnya jika $R_g \cap D_f = 0$? Mengapa?
2) Bagaimana hubungan $D_{g \circ f}$ dengan D_f? Apakah $D_{g \circ f} \subseteq D_f$? Mengapa?
3) Bagaimana hubungan dengan R_g? Apakah $R_{g \circ f} \subseteq R_g$? Mengapa?
   Untuk lebih memahami konsep fungsi komposisi, perhatikanlah contoh berikut.

Contoh 3.2

Diketahui fungsi f: $\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ dengan $f(x) = 2x + 1$ dan fungsi g: $\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ dengan $g(x) = x^2 - 1$.

1) Apakah fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$ dan $(f \circ g)(x)$ terdefinisi?
2) Tentukan fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$ dan $(f \circ g)(x)$!

Alternatif Penyelesaian

$f(x) = 2x + 1$; $g(x) = x^2 - 1$

$D_f = \{ x \mid x \in \boldsymbol{R} \} = \boldsymbol{R}$; $R_f = \{ y \mid y \in \boldsymbol{R} \} = \boldsymbol{R}$

$D_g = \{ x \mid x \in \boldsymbol{R} \} = \boldsymbol{R}$; $R_g = \{ y \mid y \in \boldsymbol{R} \} = \boldsymbol{R}$

(1) Untuk menentukan apakah fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$ dan $(f \circ g)(x)$ terdefinisi, diketahui berdasarkan:

- Jika $R_f \in Dg \neq \emptyset$ maka $(g \circ f)(x)$ terdefinisi.
  $\{ y \mid y \in R\} \cap \{ x \mid x \in R\} = R \cap R = R \neq \emptyset$, karena $R_f \cap D_g \neq \emptyset$ maka $(g \circ f)(x)$ terdefinisi.
- Jika $R_g \in D_f \neq 0$ maka $(f \circ g)(x)$ terdefinisi.
  $\{ y \mid y \in R\} \cap \{ x \mid x \in R\} = R \cap R = R \neq \emptyset$, karena $Rg \cap D_f \neq \emptyset$ maka $(f \circ g)(x)$ terdefinisi.

(2) Untuk menentukan apakah fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$ dan $(f \circ g)(x)$ sebagai berikut:

- $$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(2x + 1)\\ &= (2x + 1)^2 - 1\\ &= (4x^2 + 4x + 1) - 1\\ &= 4x^2 + 4x\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= f(x^2 - 1)\\ &= 2(x^2 - 1) + 1\\ &= 2x^2 - 2 + 1\\ &= 2x^2 - 1\end{aligned}$$

sehingga diperoleh $(g \circ f)(x) = 4x^2 + 4x$ dan $(f \circ g)(x) = 2x^2 - 1$.

Perhatikan kembali Contoh 3.2 di atas! Contoh tersebut diberikan untuk menentukan fungsi komposisi jika fungsi-fungsi yang lain telah diketahui. Berikut ini diberikan contoh bagaimana menentukan fungsi jika diketahui fungsi komposisi dan suatu fungsi yang lain.

Contoh 3.3

Diketahui fungsi komposisi $(g \circ f)(x) = 18x^2 + 24x + 2$ dan fungsi $g(x) = 2x^2 - 6$. Tentukanlah rumus untuk

a) fungsi $f(x)$

b) fungsi komposisi $(f \circ g)(x)$!

Alternatif Penyelesaian

Jika diketahui $(g \circ f)(x) = 18x^2 + 24x + 2$ dan $g(x) = 2x^2 - 6$

a) Menentukan fungsi $f(x)$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 18x^2 + 24x + 2$$

$$\Leftrightarrow 2\, f(x)^2 - 6 = 18x^2 + 24x + 2$$

$$\Leftrightarrow 2\, f(x)^2 = 18x^2 + 24x + 2 + 6$$

$$\Leftrightarrow f(x)^2 = \frac{18x^2 + 24x + 8}{2}$$

$$\Leftrightarrow f(x)^2 = 9x^2 + 12x + 4$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \pm\sqrt{9x^2 + 12x + 4}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \pm(3x + 2)$$

Jadi ada dua fungsi f yang mungkin, yaitu; $f(x) = 3x + 2$ dan $f(x) = -3x - 2$.

b) Menentukan fungsi komposisi $(f \circ g)(x)$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 18x^2 + 24x + 2$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$= -3g(x) - 2, \quad \text{karena } f(x) = -3x - 2$$

$$= -3(2x^2 - 6) - 2$$

$$= -6x^2 + 18 - 2$$

$$= -6x^2 + 16$$

Jadi, fungsi komposisi $(f \circ g)(x) = -6x^2 + 16$

3. Sifat-sifat Operasi Fungsi Komposisi

Lakukanlah pengamatan pada beberapa contoh soal berikut untuk menentukan sifat-sifat operasi fungsi komposisi. Dari pengamatan yang kamu lakukan, tariklah sebuah kesimpulan terkait sifat operasi fungsi komposisi.

Contoh 3.4

Diketahui fungsi f: $\boldsymbol{R}\rightarrow\boldsymbol{R}$ dengan $f(x) = 4x + 3$ dan fungsi g: $\boldsymbol{R}\rightarrow\boldsymbol{R}$ dengan $g(x) = x-1$.

a) Tentukanlah rumus fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$ dan $(f \circ g)(x)$

b) Selidiki apakah $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$!

Penyelesaian

a) Menentukan rumus fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$ dan $(f \circ g)(x)$

* $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
$= g(4x + 3)$
$= (4x + 3) -1$
$= 4x + 2$

* $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
$= f(x - 1)$
$= 4(x - 1) + 3$
$= 4x - 4 + 3$
$= 4x - 1$

Dengan demikian $(g \circ f)(x) = 4x + 2$ dan $(f \circ g)(x) = 4x - 1$.

b) Selidiki apakah $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$!

Berdasarkan hasil perhitungan butir (a) di atas diperoleh
$(g \circ f)(x) = 4x + 2$, dan
$(f \circ g)(x) = 4x - 1$
Andaikan $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$
$4x + 2 = 4x - 1$
$2 = -1$
Ternyata hasil yang diperoleh adalah kontradiksi dari pernyataan.
Jadi, $g \circ f \neq f \circ g$
Berdasarkan Contoh 3.4 di atas, disimpulkan bahwa pada umumnya sifat komutatif pada operasi fungsi komposisi tidak berlaku, yaitu; $g \circ f \neq f \circ g$.

Contoh 3.5

Diketahui fungsi f: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dengan $f(x) = 2x - 1$ dan fungsi g: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dengan $g(x) = 4x+5$, dan fungsi h: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dengan $h(x) = 2x - 3$.

a) Tentukanlah fungsi komposisi $(g \circ (f \circ h))(x)$ dan $((g \circ f) \circ h)(x)$.
b) Tentukanlah fungsi komposisi $(f \circ (g \circ h))(x)$ dan $((f \circ g) \circ h)(x)$.
c) Selidiki apakah: i) $(g \circ (f \circ h))(x) = ((g \circ f) \circ h)(x)$, dan
ii) $(f \circ (g \circ h))(x) = ((f \circ g) \circ h)(x)$

Alternatif Penyelesaian

a) Rumus fungsi komposisi $(g \circ (f \circ h))(x)$ dan $((g \circ f) \circ h)(x)$

i) Misalkan $k(x) = (f \circ h)(x)$

$$\begin{aligned}
k(x) &= f(h(x)) \\
&= 2h(x) - 1 \\
&= 2(2x - 3) - 1 \\
&= 4x - 6 - 1 \\
&= 4x - 7 \\
(g \circ (f \circ h))(x) &= (g \circ k)(x) \\
&= g(k(x)) \\
&= 4(k(x)) + 5 \\
&= 4(4x - 7) + 5 \\
&= 16x - 28 + 5 \\
&= 16x - 23
\end{aligned}$$

Jadi fungsi komposisi $(g \circ (f \circ h))(x) = 16x - 23$

ii) Misalkan $l(x) = (g \circ f)(x)$

$$\begin{aligned}
l(x) = g(f(x)) &= 4(f(x)) + 5 \\
&= 4(2x - 1) + 5 \\
&= 8x - 4 + 5 \\
&= 8x + 1 \\
((g \circ f) \circ h)(x) &= (l \circ h)(x) \\
&= l(h(x)) \\
&= 8(h(x)) + 1 \\
&= 8(2x - 3) + 1 \\
&= 16x - 24 + 1 \\
&= 16x - 23
\end{aligned}$$

Jadi rumus fungsi komposisi $((g \circ f)\ h)(x) = 16x - 23$.

b) Rumus fungsi komposisi $f \circ (g \circ h)$ dan $(f \circ g)\ h$

i) Misalkan $m(x) = (g \circ h)(x)$

$$
\begin{aligned}
m(x) = g(h(x)) &= 4(h(x)) + 5 \\
&= 4(2x - 3) + 5 \\
&= 8x - 12 + 5 \\
&= 8x - 7 \\
(f \circ (g \circ h)(x) &= (f \circ m)(x) \\
&= f(m(x)) \\
&= 2(m(x)) - 1 \\
&= 2(8x - 7) - 1 \\
&= 16x - 14 - 1 \\
&= 16x - 15
\end{aligned}
$$

Jadi rumus fungsi komposisi $(f \circ (g \circ h))(x) = 16x - 15$

ii) Misalkan $n(x) = (f \circ g)(x)$

$$
\begin{aligned}
n(x) &= f(g(x)) \\
&= 2(4x + 5) - 1 \\
&= 8x + 10 - 1 \\
&= 8x + 9 \\
((f \circ g) \circ h)(x) &= (n \circ h(x)) \\
&= n(h(x)) \\
&= 8(h(x)) + 9 \\
&= 8(2x - 3) + 9 \\
&= 16x - 24 + 9 \\
&= 16x - 15
\end{aligned}
$$

Jadi rumus fungsi komposisi $((f \circ g) \circ h))(x) = 16x - 15$

iii) Dari butir (a) dan butir (b), diperoleh nilai

i) $(g \circ (f \circ h))(x) = 16x - 23$ dan $((g \circ f) \circ h)(x) = 16x - 23$

ii) $(f \circ (g \circ h))(x) = 16x - 15$ dan $((f \circ g) \circ h)(x) = 16x - 15$

Berdasarkan nilai-nilai ini disimpulkan bahwa

i) $(g \circ (f \circ h))(x) = ((g \circ f) \circ h)(x) = 16x - 23$

ii) $(f \circ (g \circ h))(x) = ((f \circ g) \circ h)(x) = 16x - 15$

Sifat 3.1

Diketahui f, g, dan h suatu fungsi. Jika $R_h \cap D_g \neq \emptyset$; $Rg \cap Df \neq \emptyset$; maka pada operasi komposisi fungsi berlaku sifat asosiatif, yaitu;

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

Contoh 3.6

Diketahui fungsi f: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dengan $f(x) = 5x - 7$ dan fungsi I: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dengan $I(x) = x$.

a) Rumus fungsi komposisi $f \circ I$ dan $I \circ f$.

b) Selidikilah apakah $f \circ I = I \circ f = f$.

Alternatif Penyelesaian

a) Rumus fungsi komposisi $f \circ I$ dan $I \circ f$

- ✔ $(f \circ I)(x) = f(I(x))$
  $= f(x)$
  $= 5x - 7$
- ✔ $(I \circ f)(x) = I(f(x))$
  $= I(f(x))$
  $= 5x - 7$

a) Berdasarkan hasil-hasil pada butir (a) di atas disimpulkan bahwa: $f \circ I = I \circ f = f$

Berdasarkan penyelesaian Contoh 3.6 kita peroleh sifat berikut.

Sifat 3.2

Diketahui f suatu fungsi dan I merupakan fungsi identitas. Jika $R_i \cap D_f \neq \emptyset$ maka terdapat sebuah fungsi identitas yaitu: $I(x) = x$, sehingga berlaku sifat identitas, yaitu; $f \circ I = I \circ f = f$

Agar kamu lebih memahami sifat 3.2, selesaikanlah latihan berikut.

Latihan

Diketahui fungsi f: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dengan $f(x) = 5x - 7$ dan fungsi identitas I: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dengan $I(x) = x$. Buktikanlah bawah $(f \circ I) = (I \circ f) = f$.

Uji Kompetensi 3.1

1. Suatu pabrik kertas berbahan dasar kayu memproduksi kertas melalui dua tahap. Tahap pertama dengan menggunakan mesin I yang menghasilkan bahan kertas setengah jadi, dan tahap kedua dengan menggunakan mesin II yang menghasilkan bahan kertas. Dalam produksinya mesin I menghasilkan bahan setengah jadi dengan mengikuti fungsi $f(x) = 0{,}7x + 10$ dan pada mesin II terdapat bahan campuran lain sehingga mengikuti fungsi $g(x) = 0{,}02x^2 + 12x$, x merupakan banyak bahan dasar kayu dalam satuan ton.

   a) Jika bahan dasar kayu yang tersedia untuk suatu produksi sebesar 50 ton, berapakah kertas yang dihasilkan? (kertas dalam satuan ton).

   b) Jika bahan setengah jadi untuk kertas yang dihasilkan oleh mesin I sebesar 110 ton, berapa ton kah kayu yang sudah terpakai? Berapa banyak kertas yang dihasilkan?

2. Diketahui fungsi $f(x) = \dfrac{x-3}{x}$, $x \neq 0$ dan $g(x) = \sqrt{x^2 - 9}$. Tentukan rumus fungsi berikut bila terdefinisi dan tentukan daerah asal dan daerah hasilnya.

   a) $(f + g)(x)$

   b) $(f - g)(x)$

   c) $(f \times g)(x)$

   d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

3. Misalkan f fungsi yang memenuhi untuk $f\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{1}{x} f(-x) = 2x$ setiap $x \neq 0$. Tentukanlah nilai $f(2)$.

4. Diketahui fungsi f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dengan $f(x) = x^2 - 4x + 2$ dan fungsi g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dengan $g(x) = 3x - 7$.

   a) $(g \circ f)(x)$

   b) $(f \circ g)(x)$

   c) $(g \circ f)(5)$

   d) $(f \circ g)(10)$

5. Jika $f(xy) = f(x + y)$ dan $f(7) = 7$. Tentukanlah nilai $f(49)$!

6. Diketahui fungsi f dan g dinyatakan dalam pasangan terurut

   $f = \{(1,5), (2,6), (3,-1), (4,8)\}$

   $g = \{(2,-1), (1,2), (5,3), (6,7)\}$

   Tentukanlah

   a) $(g \circ f)(x)$

   b) $(f \circ g)(x)$

7. Jika f fungsi yang memenuhi persamaan $f(1) = 4$ dan $f(x+1) = 2\, f(x)$. Tentukanlah $f(2014)$!

8. Jika $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ dan $x^2 \neq 1$, buktikanlah bahwa $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

9. Untuk pasangan fungsi yang diberikan tentukanlah daerah asal dan daerah hasil fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$.

   a) $f(x) = 2x$ dan $g(x) = \sin x$

   b) $f(x) = -x$ dan $g(x) = \ln x$

   c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ dan $g(x) = 2 \sin x$

10. Jika $f(x) = 2^{2x} + 2^{x+1} - 3$ dan $g(x) = 2^x + 3$. Tentukanlah nilai $\dfrac{f(x)}{g(x)}$!

11. Diketahui fungsi $f(x) = 2^{x+2} \times 6^{x-4}$ dan $g(x) = 12^{x-1}$ untuk x bilangan asli. Tentukanlah nilai $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

12. Diketahui $(g \circ f)(x) = 4x^2 + 4x$ dan $g(x) = x^2 - 1$. Tentukanlah nilai $f(x - 2)$.

4. Fungsi Invers

Berikutnya, kita akan mempelajari balikan dari fungsi yang disebut dengan fungsi invers. Dengan demikian, mari kita memahami masalah berikut.

Masalah-3.4

Seorang pedagang kain memperoleh keuntungan dari hasil penjualan setiap x potong kain sebesar $f(x)$ rupiah. Nilai keuntungan yang diperoleh mengikuti fungsi $f(x) = 500x + 1000$, (dalam ribuan rupiah) x adalah banyak potong kain yang terjual.

a) Jika dalam suatu hari pedagang tersebut mampu menjual 50 potong kain, berapa keuntungan yang diperoleh?

b) Jika keuntungan yang diharapkan sebesar Rp100.000,00 berapa potong kain yang harus terjual?

c) Jika A merupakan daerah asal (*domain*) fungsi f dan B merupakan daerah hasil (*range*) fungsi f, gambarkanlah permasalahan butir (*a*) dan butir (*b*) di atas.

Alternatif Penyelesaian

Keuntungan yang diperoleh mengikuti fungsi $f(x) = 500x + 1000$, untuk setiap x potong kain yang terjual.

a) Penjualan 50 potong kain, berarti $x = 50$ dan nilai keuntungan yang diperoleh adalah:

$f(x) = 500x + 1000$

untuk $x = 50$ berarti $f(50) = (500 \times 50) + 1000$

$= 2500 + 1000$

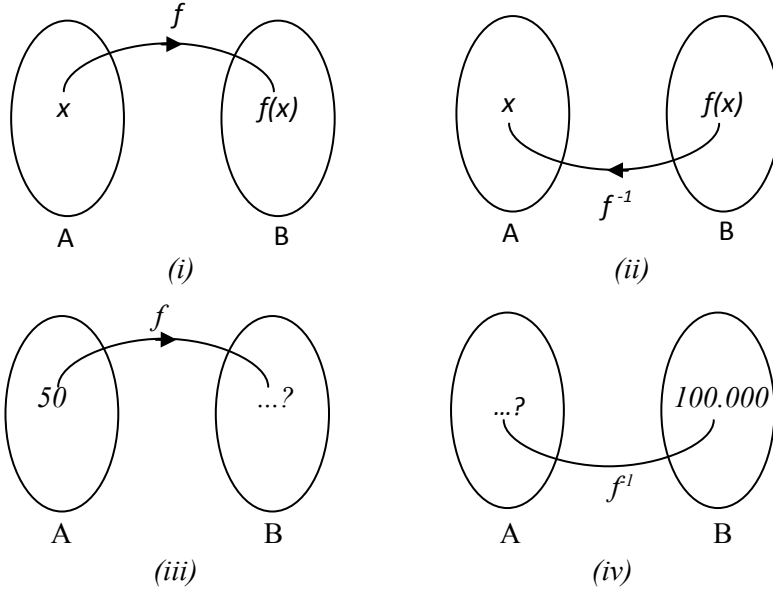
$= 3600$

Jadi keuntungan yang diperoleh dalam penjualan 50 potong kain sebesar Rp3.600.000,-

b) Agar keuntungan yang diperoleh sebesar Rp100.000,-, maka banyak potong kain yang harus terjual adalah:

$$\begin{aligned} f(x) &= 500x + 1000 \\ 100.000 &= 500x + 1000 \\ 500x &= 100.000 - 1.000 \\ 500x &= 99.000 \\ x &= \frac{99.000}{500} \\ &= 198 \end{aligned}$$

Jadi banyak potong kain yang harus terjual adalah 198 potong.

c) Jika A merupakan daerah asal fungsi f dan B merupakan daerah hasil fungsi f, permasalahan butir (a) dan butir (b) di atas digambarkan seperti berikut.

Gambar 3.3. Invers Fungsi

Berdasarkan Gambar 3.3 di atas, dikemukakan beberapa hal sebagai berikut.

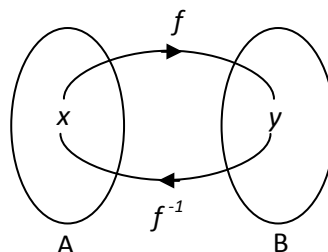
(a) Gambar 3.3 (i) menunjukkan bahwa fungsi f memetakan A ke B, ditulis: f: $A \rightarrow B$.

(b) Gambar 3.3 (ii) menunjukkan bahwa f^{-1} memetakan B ke A, ditulis: f^{-1}: $B \rightarrow A$. f^{-1} merupakan invers fungsi f.

(c) Gambar 3.3 (iii) menunjukkan bahwa untuk nilai $x = 50$ maka akan dicari nilai $f(x)$.

(d) Gambar 3.3 (iv) menunjukkan kebalikan dari Gambar 3.3 (iii) yaitu mencari nilai x jika diketahui nilai $f(x) = 100.000$.

Untuk lebih memahami konsep invers suatu fungsi, perhatikan kembali Gambar 3.4 berikut.

Berdasarkan Gambar 3.4 di samping, diketahui beberapa hal sebagai berikut. Pertama, fungsi f memetakan $x \in A$ ke $y \in B$. Ingat kembali pelajaran Kelas X tentang menyatakan fungsi ke dalam bentuk pasangan berurutan. Jika fungsi f dinyatakan ke dalam bentuk pasangan berurutan, maka dapat ditulis sebagai berikut.

$f = \{(x, y) \mid x \in A$ dan $y \in B\}$. Pasangan berurut (x, y) merupakan unsur dari fungsi f.

Kedua, invers fungsi f atau f^{-1} memetakan $y \in B$ ke $x \in A$. Jika invers fungsi f dinyatakan ke dalam pasangan berurutan, maka dapat ditulis $f^{-1} = \{(y, x) \mid y \in B$ dan $x \in A\}$. Pasangan berurut (y, x) merupakan unsur dari invers fungsi f.

Berdasarkan uraian-uraian di atas, diberikan definisi invers suatu fungsi sebagai berikut.

Definisi 3.3

Jika fungsi f memetakan A ke B dan dinyatakan dalam pasangan berurutan $f = \{(x, y) \mid x \in A$ dan $y \in B\}$, maka invers fungsi f (dilambangkan f^{-1}) adalah relasi yang memetakan B ke A, dalam pasangan berurutan dinyatakan dengan $f^{-1} = \{(y, x) \mid y \in B$ dan $x \in A\}$.

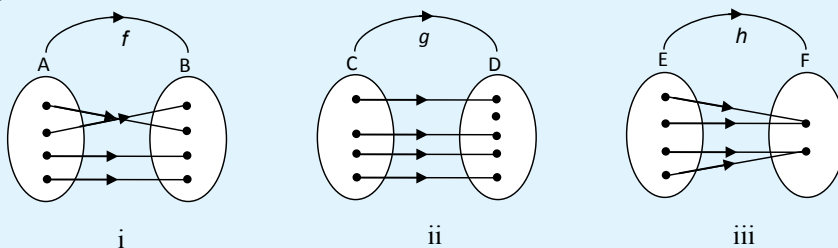
Untuk lebih memahami konsep invers suatu fungsi, selesaikanlah Masalah 3.5 berikut.

Masalah-3.5

Diketahui fungsi $f: A \rightarrow B$ merupakan fungsi bijektif, fungsi $g: C \rightarrow D$ merupakan fungsi injektif, dan fungsi $h: E \rightarrow F$ merupakan fungsi surjektif yang digambarkan seperti Gambar 3.5 di bawah ini.

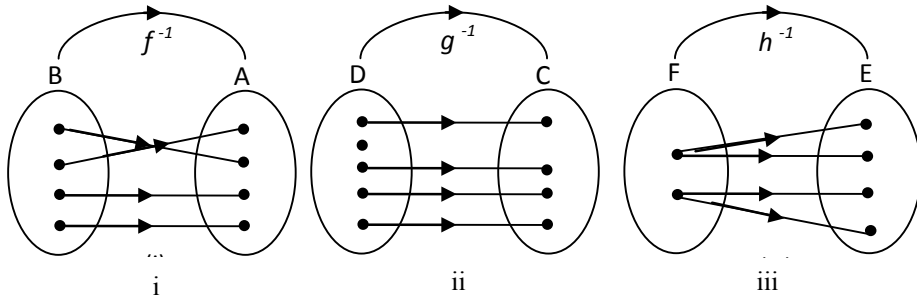
i

ii

iii

Gambar 3.5. Fungsi *f*, *g*, dan *h*

a) Jika invers fungsi f memetakan B ke A, invers fungsi g memetakan D ke C, dan invers fungsi h memetakan F ke E, gambarlah ketiga invers fungsi tersebut!
b) Dari ketiga invers fungsi tersebut, tentukanlah mana yang merupakan fungsi.

Alternatif Penyelesaian

a) Gambar ketiga invers fungsi tersebut ditunjukkan sebagai berikut.

b) Berdasarkan Gambar 3.6, disimpulkan sebagai berikut.
- Gambar 3.6 (i) merupakan fungsi. Mengapa?
- Gambar 3.6 (ii) bukan fungsi. Mengapa?
- Gambar 3.6 (iii) bukan fungsi. Mengapa?

Berdasarkan alternatif penyelesaian pada Masalah 3.5 di atas, dapat disimpulkan bahwa invers suatu fungsi belum tentu merupakan fungsi tetapi dapat hanya berupa relasi biasa. Invers fungsi g dan h **bukan** suatu fungsi melainkan hanya relasi biasa. Invers suatu fungsi yang merupakan fungsi disebut **fungsi invers**. Invers fungsi f merupakan suatu fungsi invers.

Berdasarkan uraian di atas, ditemukan sifat berikut.

Sifat 3.3

Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ dikatakan memiliki fungsi invers $f^{-1}: B \rightarrow A$ jika dan hanya jika fungsi f merupakan fungsi bijektif.

Perhatikan kembali Sifat 3.3 di atas, pada fungsi bijektif $f: A \rightarrow B$, A merupakan daerah asal fungsi f dan B merupakan daerah hasil fungsi f. Secara umum, definisi fungsi invers diberikan sebagai berikut.

Definisi 3.4

Jika fungsi $f: D_f \to R_f$ adalah fungsi bijektif, maka invers fungsi f adalah fungsi yang didefinisikan sebagai $f^{-1}: R_f \to D_f$ dengan kata lain f^{-1} adalah fungsi dari R_f ke D_f.

Perhatikan kembali Definisi 3.4 di atas. Fungsi $f: D_f \to R_f$ adalah fungsi bijektif, jika $y \in R_f$ merupakan peta dari $x \in D_f$, maka hubungan antara y dengan $f(x)$ didefinisikan dengan $y = f(x)$. Jika f^{-1} adalah fungsi invers dari fungsi f, maka untuk setiap $x \in R_{f^{-1}}$ adalah peta dari $y \in D_{f^{-1}}$. Hubungan antara x dengan $f^{-1}(y)$ didefinisikan dengan rumus $x = f^{-1}(y)$.

5. Menentukan Rumus Fungsi Invers

Masalah-3.6

Salah satu sumber penghasilan yang diperoleh klub sepak bola adalah hasil penjualan tiket penonton jika timnya sedang bertanding. Besar dana yang diperoleh bergantung pada banyaknya penonton yang menyaksikan pertandingan tersebut. Suatu klub memberikan informasi bahwa besar pendapatan yang diperoleh klub dari penjualan tiket penonton mengikuti fungsi $f(x) = 50.000x + 20.000$, dengan x merupakan banyak penonton yang menyaksikan pertandingan.

a) Tentukanlah invers fungsi pendapatan dari tiket penonton klub sepak bola tersebut.

b) Jika dalam suatu pertandingan, klub memperoleh dana hasil penjualan tiket penonton sebesar Rp55.570.000,-. Berapa penonton yang menyaksikan pertandingan tersebut?

Alternatif Penyelesaian

Diketahui bahwa fungsi pendapatan klub sepak bola tersebut adalah $f(x) = 50.000x + 20.000$

a) Invers fungsi pendapatan dari tiket penonton klub sepak bola

Untuk menentukan rumus fungsi invers $f(x)$ dilakukan sebagai berikut.

$y = f(x) = 50.000x + 20.000$

$y = 50.000x + 20.000$

$50.000x = y - 20.000$

$$x = \frac{y - 20.000}{50.000}$$

Karena $x = f^{-1}(y)$ maka $f^{-1}(y) = \dfrac{y - 20.000}{50.000}$

Karena $f^{-1}(y) = \dfrac{y - 20.000}{50.000}$ maka $f^{-1}(x) =$ $f^{-1}(x) = \dfrac{x - 20.000}{50.000}$

Jadi, fungsi invers dari $f(x) = 50.000x + 20.000$ adalah $f^{-1}(x) = \dfrac{x - 20.000}{50.000}$ atau $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{50.000}(x - 20.000)$.

b) Jika dana hasil penjualan tiket penonton sebesar Rp 55.570.000, maka banyak penonton yang menyaksikan pertandingan tersebut adalah

$$f^{1}(x) = \frac{x - 20.000}{50.000}$$

$$f^{1}(5.000.000) = \frac{55.570.000 - 20.000}{50.000}$$

$$= \frac{55.570.000 - 20.000}{50.000}$$

$$= 1111$$

Jadi, penonton yang menyaksikan pertandingan itu sebanyak 1111 orang.

Berdasarkan alternatif penyelesaian Masalah 3.6 di atas, diperoleh sifat sebagai berikut.

Sifat 3.4

Misalkan f^{-1} adalah fungsi invers fungsi f. Untuk setiap $x \in D_f$ dan $y \in R_f$ berlaku $y = f(x)$ jika dan hanya jika $f^{-1}(y) = x$.

Contoh 3.7

Diketahui fungsi f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dengan $f(x) = 5x + 7$. Tentukanlah fungsi inversnya!.

Alternatif Penyelesaian

Karena $y = f(x)$, maka $y = 5x + 7$

$5x = y - 7$

$x = \dfrac{x-7}{5}$

Karena $x = f^{-1}(y)$, maka $f^{-1}(y) = \dfrac{x-7}{5}$

Karena $f^{-1}(y) = \dfrac{x-7}{5}$, maka $f^{-1}(x) \quad = \dfrac{x-7}{5}$,

$$= \frac{1}{5}(x-7)$$

Jadi fungsi invers $f(x) = 5x + 7$ adalah $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}(x-7)$.

Contoh 3.8

Diketahui fungsi f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dengan $f(x) = 3x - 1$. Tentukanlah fungsi inversnya!.

Alternatif Penyelesaian

Karena $y = f(x)$, maka $y = 3x - 1$

$y = 3x - 1$

$3x = y + 1$

$x = \dfrac{y+1}{3}$

Karena $f^{-1}(y) = x$, maka $f^{-1}(y) = \dfrac{y+1}{3}$

Karena $f^{-1}(y) = \dfrac{y+1}{3}$, maka $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{3}$,

Jadi fungsi invers $f(x) = 3x - 1$ adalah $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{3}$.

a) Tunjukan rumus fungsi komposisi $(f \circ f^{-1})(x)$ dan $(f^{-1} \circ f)(x)$

b) Kesimpulan apa yang bisa kamu temukan?

Alternatif Penyelesaian

(1) Berdasarkan Contoh 3.7, diketahui bahwa $f(x) = 5x + 7$ dan $f^{-1}(x)$ $= \frac{1}{5}(x - 7)$.)

a) Rumus fungsi komposisi $(f \circ f\text{-}1)(x)$ dan $(f\text{-}1 \circ f)(x)$ ditentukan sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
(f \circ f^{-1})(x) &= f(f^{-1}(x)) \\
&= 5(f^{-1}(x)) + 7 \\
&= 5(\frac{1}{5}(x - 7)) + 7 \\
&= x - 7 + 7 \\
&= x \\
(f^{-1} \circ f)(x) &= f^{-1}(f(x)) \\
&= \frac{x - 7}{5} \\
&= \frac{f(x) - 7}{5} \\
&= \frac{(5x + 7) - 7}{5} \\
&= \frac{5x}{5} \\
&= x
\end{aligned}
$$

b) Berdasarkan hasil pada butir (a) disimpulkan bahwa nilai $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x = I(x)$

(2) Sebagai latihanmu, silahkan buktikan bahwa $(f \circ f\text{-}1)(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x = I(x)$ juga berlaku pada Contoh 3.8.

Berdasarkan penyelesaian Contoh 3.7 dan Contoh 3.8 diperoleh sifat berikut

Sifat 3.5

Misalkan f sebuah fungsi bijektif dengan daerah asal D_f dan daerah hasil R_f sedangkan $I(x) = x$ merupakan fungsi identitas. Fungsi f^{-1} merupakan fungsi invers dari fungsi f jika dan hanya jika

$(f \circ f^{-1})(x) = x = I(x)$ untuk setiap $x \in D_f$, dan

$(f^{-1} \circ f)(x) = x = I(x)$ untuk setiap $x \in R_f$.

Sifat 3.5 di atas dapat digunakan untuk mengetahui apakah suatu fungsi merupakan fungsi invers dari fungsi f atau tidak. Agar kamu lebih memahami, perhatikan kembali Contoh 3.10 berikut.

Contoh 3.10

Buktikanlah bahwa $f(x) = 10x - 1$ dan $g(x) = \dfrac{x+1}{10}$ merupakan fungsi yang saling invers.

Alternatif Penyelesaian

Untuk membuktikan bahwa $f(x)$ dan $g(x)$ saling invers, cukup menunjukkan fungsi komposisi $f(g(x)) = g(f(x)) = x$.

Bukti.

(i) $f(g(x)) = f\left(\dfrac{x+1}{10}\right)$

$= 10(g(x)) - 1$

$= 10\left(\dfrac{x+1}{10}\right) - 1$

$= x + 1 - 1$

$= x$

(ii) $g(f(x)) = g(10x - 1)$

$= \dfrac{(10x-1)+1}{10}$

$= \dfrac{10x}{10}$

$= x$

Karena $f(g(x)) = g(f(x)) = x$, maka kedua fungsi saling invers.

Perhatikan kembali Contoh 3.11 berikut.

Contoh 3.11

Diketahui fungsi f: $\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ dengan $f(x) = x - 1$. Tentukanlah $(f^{-1})^{-1}(x)$!

Alternatif Penyelesaian

Untuk menentukan rumus $(f^{-1})^{-1}(x)$ maka langkah pertama yang dilakukan adalah menentukan $f^{-1}(x)$ sebagai berikut.

Diketahui bahwa $f(x) = x - 1$, karena $f(x) = y$, maka: $y = x - 1$ atau $x = y + 1$

Oleh karena $x = f^{-1}(y)$, maka $f^{-1}(y) = y + 1$ sehingga $f^{-1}(x) = x + 1$.

Langkah kedua adalah menentukan fungsi invers dari $f^{-1}(x)$, sebagai berikut.

Misalkan $f^{-1}(x) = h(x)$, maka fungsi invers dari $h(x)$ adalah $h^{-1}(x)$, yang ditentukan seperti berikut.

Misalkan h^{-1} adalah fungsi invers fungsi h. Untuk setiap $x \in D_h$ dan $y \in R_h$ berlaku $y = h(x)$ jika dan hanya jika $x = h^{-1}(y)$.

Karena $h(x) = x + 1$ dan $h(x) = y$, kita peroleh hubungan $y = x + 1$ atau $x = y - 1$.

Karena $x = h^{-1}(y)$, maka $h^{-1}(y) = y - 1$ sehingga $h^{-1}(x) = x - 1$.

Karena $f^{-1}(x) = h(x)$ dan $h^{-1}(x) = x - 1$, maka $(f^{-1})^{-1}(x) = x - 1$.

Jadi, $(f^{-1})^{-1}(x) = x - 1$.

Perhatikan kembali rumus fungsi $(f^{-1})^{-1}(x)$ yang kita peroleh dengan rumus fungsi $f(x)$ yang diketahui, dari kedua nilai ini kita peroleh bahwa

$$(f^{-1})^{-1}(x) = f(x) = x - 1$$

Berdasarkan hasil uraian pada Contoh 3.11 di atas, maka diperoleh sifat fungsi invers sebagai berikut.

Sifat 3.6

Jika f sebuah fungsi bijektif dan f^{-1} merupakan fungsi invers f, maka fungsi invers dari f^{-1} adalah fungsi f itu sendiri, disimbolkan dengan $(f^{-1})^{-1} = f$

Contoh 3.12

Diketahui fungsi f dan g adalah fungsi bijektif yang ditentukan dengan $f(x) = 2x + 5$ dan $g(x) = x - 2$. Tentukanlah

a) $(g \circ f)(x)$ dan $(f \circ g)(x)$

b) $f^{-1}(x)$ dan $g^{-1}(x)$

c) $(g \circ f)^{-1}(x)$ dan $(f \circ g)^{-1}(x)$

d) $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$ dan $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$

e) hubungan antara $(g \circ f)^{-1}(x)$ dengan $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$

f) hubungan antara $(f \circ g)^{-1}(x)$ dengan $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$

Alternatif Penyelesaian

a) $(g \circ f)(x)$ dan $(f \circ g)(x)$

(i) $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$= f(x) - 2$

$= (2x + 5) - 2$

$= 2x + 3$

(ii) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$= 2(g(x)) + 5$

$= 2(x- 2) + 5$

$= 2x + 1$

b) $f^{-1}(x)$ dan $g^{-1}(x)$

(i) $f^{-1}(x)$

$f(x) = 2x + 5$

karena $f(x) = y$ maka $y = 2x + 5$

$2x = y - 5$

$$x = \frac{y-7}{5}$$

Karena $f^{-1}(y) = x$ maka $f^{-1}(y) = \frac{y-5}{2}$

sehingga $f^{-1}(x) = f^{-1}(y) = \frac{y-5}{2}$

(ii) $g^{-1}(x)$

$g(x) = x - 2$

karena $g(x) = y$ maka $y = x - 2$ sehingga $x = y + 2$

karena $g^{-1}(y) = x$ maka $g^{-1}(y) = y + 2$

sehingga $g^{-1}(x) = x + 2$

c) $(g \circ f)^{-1}(x)$ dan $(f \circ g)^{-1}(x)$

(i) $(g \circ f)^{-1}(x)$

$(g \circ f)(x) = 2x + 3$

Misalkan $(g \circ f)(x) = h(x)$ sehingga $h(x) = 2x + 3$

karena $h(x) = y$ maka $y = 2x + 3$ sehingga $x = \frac{y-3}{2}$

karena $h^{-1}(y) = x$ maka $h^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}$ sehingga $h^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$

karena $(g \circ f)(x) = h(x)$ maka $(g \circ f)^{-1}(x) = h^{-1}(x)$

sehingga $(g \circ f)^{-1}(x)$

(ii) $(f \circ g)^{-1}(x)$

$(f \circ g)(x) = 2x + 1$

Misalkan $(f \circ g)(x) = k(x)$ sehingga $k(x) = 2x + 1$

karena $k(x) = y$ maka $y = 2x + 1$ sehingga $x = \frac{y-1}{2}$

karena $k^{-1}(y) = x$ maka $k^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$ sehingga $k^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$

karena $(f \circ g)(x) = k(x)$ maka $(f \circ g)^{-1}(x) = k^{-1}(x)$

sehingga $(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$

d) $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$ dan $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$

(i) $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$

Pada butir (b) telah ditemukan bahwa $g^{-1}(x) = x + 2$ dan

$$f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$$

$$\begin{aligned}(g^{-1} \circ f^{-1})(x) &= g^{-1}(f^{-1}(x)) \\ &= (f^{-1}(x)) + 2 \\ &= \frac{x-5}{2} + 2 \\ &= \frac{x-5+4}{2} \\ &= \frac{x-1}{2}\end{aligned}$$

(ii) $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ g^{-1})(x) &= f^{-1}(g^{-1}(x)) \\ &= \frac{g^{-1}(x)-5}{2} \\ &= \frac{(x+2)-5}{2} \\ &= \frac{x-3}{2}\end{aligned}$$

e) hubungan antara $(g \circ f)^{-1}(x)$ dengan $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$

Hasil perhitungan di atas menunjukkan bahwa rumus fungsi $(g \circ f)^{-1}(x)$ sama dengan $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$ atau $(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x) = \dfrac{x-1}{2}$.

f) hubungan antara $(f \circ g)^{-1}(x)$ dengan $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$

Hasil perhitungan di atas menunjukkan bahwa rumus fungsi $(f \circ g)^{-1}(x)$ sama dengan $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$ atau $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$.

Berdasarkan Contoh 3.12 di atas dapat kita simpulkan sifat berikut.

Sifat 3.7

Jika f dan g fungsi bijektif maka berlaku $(g \circ f)^{-1} = (f^{-1} \circ g^{-1})$

Agar kamu lebih memahami Sifat 3.7, selesaikanlah latihan berikut.

Latihan

Fungsi f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dan g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ditentukan oleh rumus $f(x) = 5x - 4$ dan $g(x) = 3x$. Tentukanlah rumus fungsi komposisi $(f \circ g)^{-1}(x)$ dan $(g \circ f)^{-1}(x)$!

Contoh 3.13

Tentukanlah invers fungsi $f(x)$ berikut.

a. $f(x) = 2x - 4$

b. $f(x) = x^2 - 4x + 2$

c. $f(x) = \dfrac{2x-1}{4x-1}$

Alternatif Penyelesaian

a. Menentukan invers $f(x) = 2x - 4$

Misalkan $y = 2x - 4$ sehingga $x = \dfrac{y+4}{2}$

Dengan demikian, $f^{-1}(x) = \dfrac{x+4}{2}$

b. Menentukan invers $f(x) = x^2 - 4x + 2$

Misalkan $y = x^2 - 4x + 2$ sehingga dengan kuadrat sempurna diperoleh:

$$\begin{aligned} y = x^2 - 4x + 4 - 4 + 2 &\Leftrightarrow y = (x-2)^2 - 2 \\ &\Leftrightarrow y + 2 = (x-2)^2 \\ &\Leftrightarrow x - 2 = \pm\sqrt{y+2} \\ &\Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{y+2} \end{aligned}$$

sehingga $f^{-1}(x) = 2$

c. Menentukan invers $f(x) = \dfrac{2x-1}{4x-1}$

Misalkan $y = \dfrac{2x-1}{4x-1}$ sehingga dengan proses aljabar,

$$y = \frac{2x-1}{4x-1} \Leftrightarrow y(4x-1) = 2x-1$$
$$\Leftrightarrow 4xy - y = 2x - 1$$
$$\Leftrightarrow 4xy - 2x = y - 1$$
$$\Leftrightarrow x(4y-2) = y - 1$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{y-1}{4y-2}$$

sehingga $f^{1}(x) = \dfrac{x-1}{4x-2}$

Uji Kompetensi 3.2

1. Seorang pedagang kain memperoleh keuntungan dari hasil penjualan setiap x potong kain sebesar $f(x)$ rupiah. Nilai keuntungan yang diperoleh mengikuti fungsi $f(x) = 100x + 500$, x merupakan banyak potong kain yang terjual.
   a) Jika dalam suatu hari pedagang tersebut mampu menjual 100 potong kain, berapa keuntungan yang diperoleh?
   b) Jika keuntungan yang diharapkan sebesar Rp500.000,00 berapa potong kain yang harus terjual?
   c) Jika A merupakan himpunan daerah asal (*domain*) fungsi $f(x)$ dan B merupakan himpunan daerah hasil (*range*) fungsi $f(x)$, gambarkanlah permasalahan butir (*a*) dan butir (*b*) di atas.

2. Tentukanlah fungsi invers dari fungsi-fungsi berikut jika ada.
   a) $f(x) = 2x^2 + 5$
   b) $g(x) = \dfrac{2x-1}{6}$
   c) $h(x) = \sqrt[3]{x+2}$

3. Diketahui f dan g suatu fungsi dengan rumus fungsi $f(x) = 3x + 4$ dan $g(x) = \dfrac{x-4}{3}$. Buktikanlah bahwa $f^{-1}(x) = g(x)$ dan $g^{-1}(x) = f(x)$.

4. Diketahui fungsi f: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dengan rumus fungsi $f(x) = x^2 - 4$. Tentukanlah daerah asal fungsi f agar fungsi f memiliki invers dan tentukan pula rumus fungsi inversnya untuk daerah asal yang memenuhi!

5. Untuk mengubah satuan suhu dalam derajat Celcius (^0C) ke satuan suhu dalam derajat Fahrenheit (^0F) ditentukan dengan

   rumus $F = \frac{9}{5}C + 32$.

   a) Tentukanlah rumus untuk mengubah satuan derajat Fahrenheit (^0F) ke satuan suhu dalam derajat Celcius (^0C).
   b) Jika seorang anak memiliki suhu badan 86^0F, tentukanlah suhu badan anak itu jika diukur menggunakan satuan derajat Celcius!

6. Jika $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{5}$ dan $g^{-1}(x) = \frac{3-x}{2}$ dan, tentukanlah nilai $(f \circ g)^{-1}(x)$!
7. Diketahui fungsi f: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dan g: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dirumuskan dengan $f(x) = \frac{x-1}{x}$, untuk $x \neq 0$ dan $g(x) = x + 3$. Tentukanlah $(g \circ f)^{-1}(x)$!
8. Diketahui $f(x) = 3^{x-1}$. Tentukanlah rumus fungsi $f^{-1}(x)$ dan tentukan juga $f^{-1}(81)$!

9. Diketahui fungsi $f(x) = 2x + 1$ dan $(f \circ g)(x + 1) = -2x^2 - 4x - 1$. Tentukanlah $g^{-1}(x)$ dan $g^{-1}(-2)$!

10. Fungsi f: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dan g: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ditentukan oleh rumus $f(x) = x + 2$ dan $g(x) = 2x$. Tentukanlah rumus fungsi komposisi $(f \circ g)^{-1}(x)$ dan $(g \circ f)^{-1}(x)$!

11. Diketahui $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ dan $(f \circ g)(x) = \frac{1}{x-2}\sqrt{x^2 - 4x + 5}$.
    Tentukanlah $(f \circ g)^{-1}(x)$.
12. Diketahui fungsi $f(x) = \frac{x+1}{x}, x \neq 0$ dan f^{-1} adalah invers fungsi f. Jika k adalah banyaknya faktor prima dari 210, tentukanlah nilai $f^{-1}(k)$.

Projek

Rancanglah sebuah permasalahan kehidupan nyata dan selesaikan dengan menggunakan konsep fungsi komposisi. Buatlah laporannya dan persentasikan di depan kelas.

D. PENUTUP

Berdasarkan uraian materi pada Bab 3 ini, beberapa kesimpulan yang dapat dinyatakan sebagai pengetahuan awal untuk mendalami dan melanjutkan bahasan berikutnya. Beberapa kesimpulan disajikan sebagai berikut.

1. Jika f suatu fungsi dengan daerah asal D_f dan g suatu fungsi dengan daerah asal D_g, maka pada operasi aljabar penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian dinyatakan sebagai berikut.
   (1) Jumlah f dan g ditulis $f + g$ didefinisikan sebagai $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ dengan daerah asal $D_{f+g} = D_f \cap D_g$.
   (2) Selisih f dan g ditulis $f - g$ didefinisikan sebagai $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ dengan daerah asal $D_{f-g} = D_f \cap D_g$.
   (3) Perkalian f dan g ditulis $f \times g$ didefinisikan sebagai $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ dengan daerah asal $D_{f \times g} = D_f \cap D_g$.
   (4) Pembagian f dan g ditulis $\frac{f}{g}$ didefinisikan sebagai $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ dengan daerah asal $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x|\ g(x) = 0\}$.
2. Jika f dan g fungsi dan $R_f \cap D_g \neq Ø$, maka terdapat suatu fungsi h dari himpunan bagian D_f ke himpunan bagian R_g yang disebut fungsi komposisi f dan g (ditulis: $g \circ f$) yang ditentukan dengan
   $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$
3. Sifat komutatif pada operasi fungsi komposisi tidak memenuhi, yaitu; $(g \circ f) \neq (f \circ g)$.

4. Diketahui f, g, dan h suatu fungsi. Jika $R_h \cap D_g \neq \emptyset$; $\emptyset$; $R_{g \circ h} \cap D_f \neq \emptyset$; $R_g \cap D_f \neq \emptyset$; $R_h \cap D_{f \circ g} \neq \emptyset$;, maka pada operasi komposisi fungsi berlaku sifat asosiatif, yaitu; $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

5. Diketahui f fungsi dan I merupakan fungsi identitas. Jika $R_I \cap D_f \neq \emptyset$ maka terdapat sebuah fungsi identitas yaitu: $I(x) = x$, sehingga berlaku sifat identitas, yaitu; $f \circ I = I \circ f = f$.

6. Jika fungsi f memetakan A ke B dan dinyatakan dalam pasangan beruru–tan $f = \{(x , y) \mid x \in A$ dan $y \in B\}$, maka invers fungsi f (dilambangkan f^{-1}) memetakan B ke A, dalam pasangan berurutan dinyatakan dengan $f^{-1} = \{(y , x) \mid y \in B$ dan $x \in A\}$.
7 Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut memiliki fungsi invers $f^{-1}: B \rightarrow A$ jika dan hanya jika fungsi f merupakan fungsi yang bijektif.

8 Jika fungsi f: $D_f \rightarrow R_f$ adalah fungsi bijektif, maka invers dari fungsi f ada–lah fungsi f^{-1} yang didefinisikan sebagai f^{-1}: $R_f \rightarrow D_f$.

9 Jika f fungsi bijektif dan f^{-1} merupakan fungsi invers f, maka fungsi invers dari f^{-1} adalah fungsi f itu sendiri.

10 Jika f dan g fungsi bijektif maka berlaku $(g \circ f)^{-1} = (f^{-1} \circ g^{-1})$.

Beberapa hal yang telah kita rangkum di atas adalah modal dasar bagi kamu dalam belajar fungsi secara lebih mendalam pada jenjang pendidikan yang lebih tinggi. Konsep-konsep dasar di atas harus kamu pahami dengan baik karena akan membantu dalam pemecahan masalah dalam kehidupan sehari-hari.

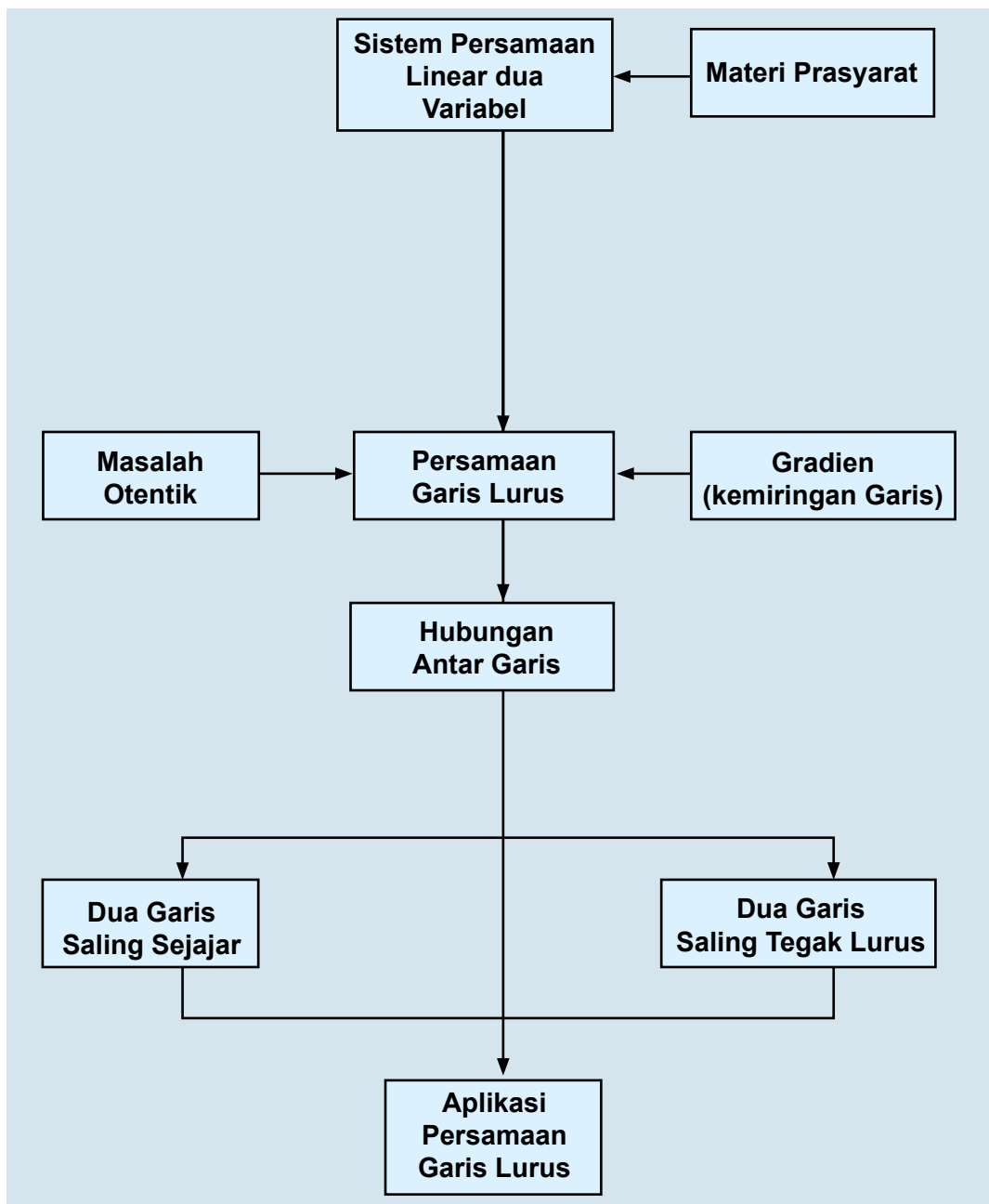
PERSAMAAN GARIS LURUS

A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
1. Mampu mentransformasi diri dalam berpilaku jujur, tangguh mengadapi masalah, kritis dan disiplin dalam melakukan tugas belajar matematika. 2. Menunjukkan sikap bertanggung jawab, rasa ingin tahu, jujur dan perilaku peduli lingkungan. 3. Menganalisis sifat dua garis sejajar dan saling tegak lurus dan menerapkannya dalam menyelesaikanmasalah. 4. Menganalisis kurva-kurva yang melalui beberapa titik untuk menyimpulkan berupa garis lurus,garis-garis sejajar, atau garis-garis tegak lurus.	Melalui pembelajaran persamaan garis lurus, siswa memperoleh pengalaman belajar: • berlatih untuk tangguh menghadapi masalah • berlatih siswa untuk berpikir kritis, jujur, dan disiplin • menunjukkan sikap bertanggung jawab dalam menyelesaikan masalah • menunjukkan sikap rasa ingin tahu dan peduli terhadap lingkungan • berlatih menganalisis masalah secara konsisten dan jujur

Istilah Penting

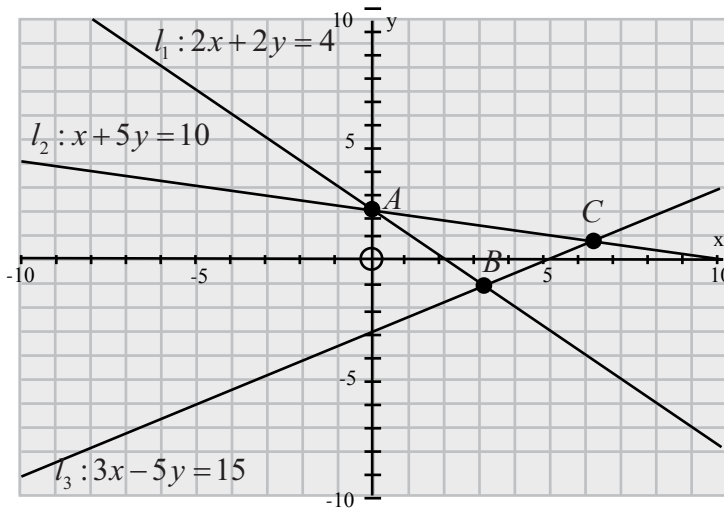
- *gradien*
- *dua garis sejajar*
- *dua garis tegak lurus*
- *titik potong garis*

B. PETA KONSEP

C. MATERI PEMBELAJARAN

1. Garis dan Gradien

Memulai subbab ini, kita awali dengan mengingat kembali materi yang sudah pernah kamu pelajari di SMP (Kelas VIII) tentang bagaimana menentukan persamaan garis lurus dan gradien suatu garis. Coba perhatikan bentuk persamaan garis dan gradien garis di bawah ini.

1. Garis dengan persamaan $ax + by = c$ gradien $m = -\frac{a}{b}$
2. Garis dengan persamaan $y = ax + c$ gradien $m = a$
3. Garis dengan persamaan $y - y_1 = p(x - x_1)$ gradien $m = p$
4. Garis dengan persamaan $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ gradien $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

   $a, b, c, x_1, y_1 \in R$

Gambar 4.1: Tiga perpotongan 3 garis lurus

Dari gambar di atas, tentunya kamu dapat menentukan gradien dan titik titik potong antara garis dan titik potong garis dengan setiap sumbu y dan sumbu x .

i. Dari persamaan garis l_1 , kamu sudah dapat mengetahui gradien garis tersebut. Tetapi, gradien garis l_1 dapat juga ditentukan melalui dua titik pada garis tersebut, misalnya A dan B. Tentunya hasilnya pasti sama.

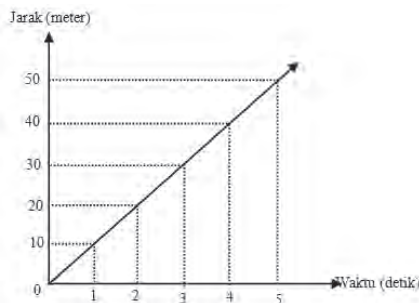
ii. Demikian halnya untuk garis l_2 dan l_3 .

Dengan adanya persamaan garis atau dengan melalui titik potong garis, tentunya bukan sesuatu yang sulit menentukan gradien garis tersebut.

Mari kita telaah kondisi berikut ini.

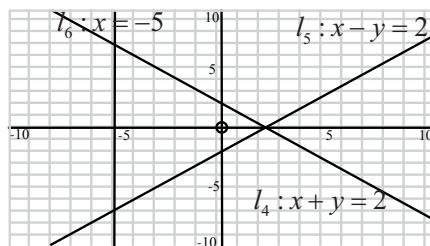
Di jalan yang lurus dan datar mungkin kelajuan mobil dapat diusahakan tetap. Gerak pesawat terbang pada ketinggian tertentu akan memiliki kecepatan tetap. Kecepatan tetap dapat disajikan sebagai garis lurus. Kedua contoh tadi adalah contoh dari gerak lurus beraturan (GLB), lintasan benda berupa garis lurus dan arah gerak selalu tetap sehingga perpindahan dapat diganti dengan jarak dan kelajuan tetap dapat diganti dengan kecepatan tetap. Sebuah benda yang bergerak dengan kecepatan tetap akan menempuh jarak yang sama untuk selang waktu t yang sama.

Coba cermati grafik berikut ini.

- Dari gambar di samping, apa kesimpulan yang dapat ditarik?
- Gradien kecepatan $m_v > 0$, gambarkan tiap-tiap grafik dengan $m_v < 0, m_v = 0$

Gambar 4.2: Grafik jarak terhadap waktu

Bandingkan grafik pada Gambar 4.2 dengan grafik di bawah ini.

Kita sebut gradien l_4 adalah m_4=-1 gradien l_5 adalah m_5 = 1.

- Jika merupakan gradien m_6, dapatkah kamu tentukan l_6 ?

Gambar 4.3

Dari Gambar 4.1, 4.2, dan 4.3 dapat kita rangkum gradien tiap-tiap garis:

a) $l_1 : 2x + 2y = 4$ dengan $m_1 = -1$;

b) $l_2 : x + 5y = 10$ dengan $m_2 = -\frac{1}{5}$;

c) $l_3 : 3x - 5y = 15$ dengan $m_3 = \frac{3}{5}$;

d) $v : v = 10t$ dengan $m_v = 10$;

e) $l_4 : x + y = 2$ dengan $m_4 = -1$;

d) $l_5 : x - y = 2$ dengan $m_5 = 1$.

- Mengapa garis l_6 tidak mempunyai gradien?
- Dengan mencermati kembali setiap grafik persamaan garis di atas, apa yang dapat kamu simpulkan tentang gradien garis.

Berikut ini kita akan mengkaji masalah tentang penampungan air yang terjadi di daerah-daerah yang kesulitan air untuk keperluan sehari-hari.

Masalah-4.1

Keluarga Pak Bambang memiliki sumur dan mesin pompa untuk menyediakan air untuk keperluan minum, cuci dan mandi. Setelah melalui proses penyaringan, air sumur tersebut dialirkan ke bak mandi keluarga tersebut. Setiap hari, keluarga Pak Bambang memerlukan 1000 liter air, yang diperoleh dengan dua kali mengisi bak mandi (setiap pengisian 500 liter). Karena keterbatasan daya listrik di rumah Pak Bambang, mesin pompa hanya dapat digunakan pada saat alat-alat listrik lain di rumah tersebut tidak dioperasikan. Jumlah air yang tertampung setiap menit dinyatakan dalam tabel berikut ini.

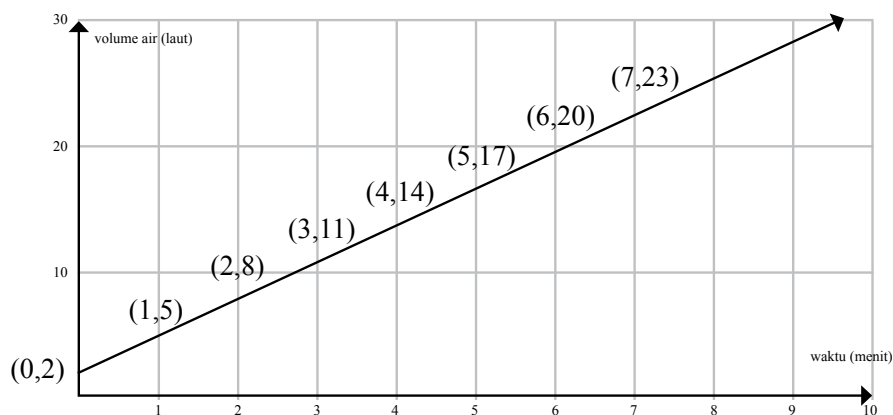
Tabel 4.1: Volume air pada bak mandi setiap menit.

Waktu (menit)	0	1	2	3	4	5	6	7	…
Volume (Liter)	2	5	8	11	14	17	20	23	…

a) Dengan tanpa menunggu bak mandi hingga penuh, dapatkah kamu memberi tahu Pak Bambang tentang durasi waktu hingga bak tersebut penuh?

b) Jika Pak Bambang ingin mengurangi 50% durasi waktu pengisian bak mandi tersebut, berapakah volume air pe rmenit yang ditambah?

Alternatif Penyelesaian

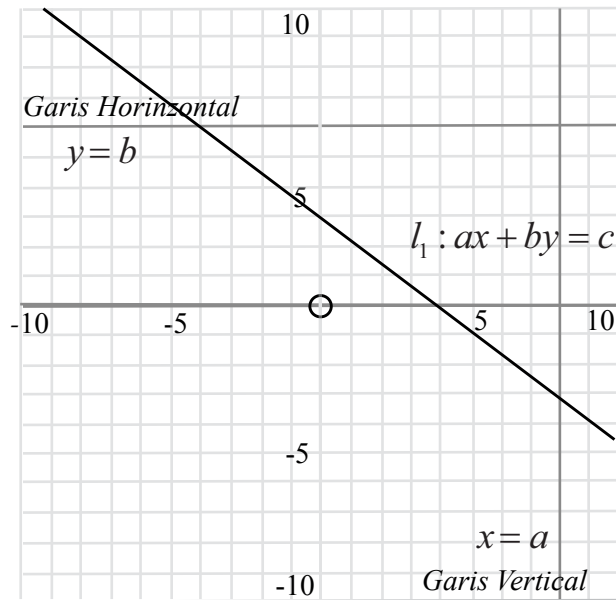
Hubungan volume air pada bak mandi dengan waktu dapat dideskripsikan pada grafik berikut ini.

Gambar 4.4: Hubungan volume air dengan waktu.

Sebaran koordinat waktu dan volume air berada pada satu garis lurus, dengan persamaan $l : –3t + v = 2$ (tunjukkan!). Persamaan $–3t + v = 2$ atau $v = 3t + 2$ memiliki gradien $m = 3$.

> *Jelaskan arti bilangan 3 dan 2 pada persamaan v = 3t + 2 dari masalah penampungan air tersebut.*

a) Ternyata, gradien persamaan garis tersebut merupakan faktor penentu besar tidaknya durasi waktu yang dibutuhkan untuk mengisi bak mandi keluarga Pak Bambang, selain konstanta. Karena volume air pada saat bak mandi penuh adalah 500 liter, akibatnya:
$500 = 3t + 2$ diperoleh $t = 166$ menit atau 2,76 jam.

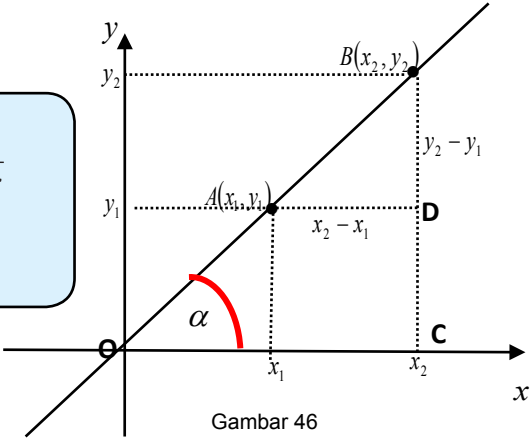
Jadi durasi waktu yang dibutuhkan Pak Bambang hingga bak mandi tersebut penuh adalah 166 menit.

b) Coba kamu kerjakan. Jika kamu kesulitan, tanyakan kepada gurumu!
Cermati gambar di bawah ini, terdapat garis horizontal $y = b$, garis vertikal $x = a$ dan garis l_1 dengan persamaan $ax + by = c$. Tentu kamu sudah tahu mana dari ketiga garis tersebut yang memiliki gradien.

Gambar 4.5: Garis vertikal, horizontal, dan garis *l*1: *ax* + *by* = *c*.

- Untuk memastikan pemahaman kamu akan eksistensi gradien suatu garis, dengan memperhatikan bentuk persamaan garis l_1: $ax + by = c$ a,b dan c merupakan bilangan real, selidiki syarat untuk:
  - $m > 0$;
  - $m < 0$;
  - $m = 0$ dan
  - garis l tidak memiliki gradien.

  Rangkum secara rinci untuk setiap syarat yang kamu temukan!

Secara geometri, gradien atau kemiringan garis dijelaskan melalui grafik berikut ini.

Dari titik A ke B titik, terdapat suatu kenaikan (perubahan tegak) sebesar dan perubahan mendatar sebesar($y_2 - y_1$) . Jadi kemiringan ($x_2 - x_1$) garis itu dinyatakan:

Gambar 46

➢ Perhatikan kembali Gambar 4.6, apakah besar sudut BAD = besar sudut α?

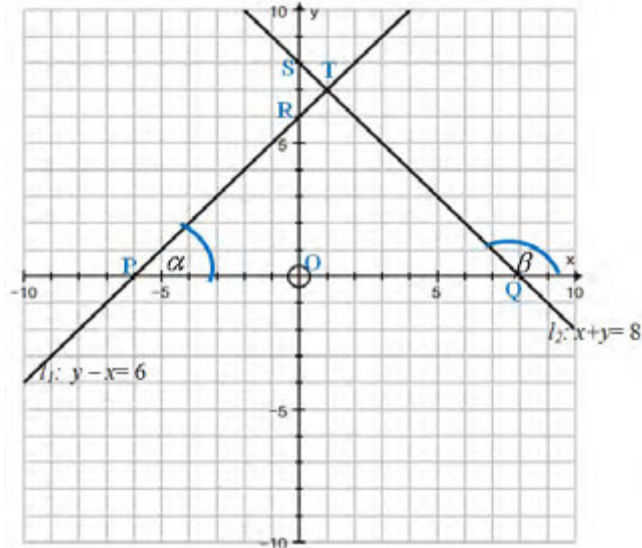
$$\tan \alpha = \frac{BC}{OC} = \frac{y_2}{x_2}$$

Pada Gambar 4.6, mari kita cermati segitiga siku-siku OBC, dengan siku-siku di titik C. Dengan mengingat kembali konsep perbandingan sudut pada segitiga siku-siku yang telah kamu pelajari pada kelas X, kita akan menentukan nilai tangen sudut α.

Sudut merupakan sudut yang dibentuk garis yang melaui titik A dan B terhadap sumbu x. Perhatikan bahwa sudut dihitung dari sumbu x ke garis yang akan ditentukan gradiennya.

➢ Perhatikan kembali Gambar 4.6, apakah besar $\angle BAD$ = besar $\angle\alpha$? Berikan Alasannya.

Contoh 4.1

Tentukan nilai tangen sudut setiap garis seperti pada gambar di bawah ini.

Keterangan:

Sudut merupakan sudut yang dibentuk oleh garis l_1 dengan Sumbu-X dan β merupakan sudut yang dibentuk oleh garis l_2 dengan Sumbu-X

Suatu sudut yang digunakan adalah derajat.

Alternatif Penyelesaian

Pada Gambar 4.7, kita akan menentukan nilai $\tan\alpha$ dan $\tan\beta$. Dengan segitiga siku-siku *POR* kita akan tentukan $\tan\alpha$, sedangkan dengan segitiga siku-siku *QOS* kita akan menentukan $\tan\beta$.

Ingat......!!!!

$$Sin\left(180^\circ - \alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\cos\left(180^\circ - \alpha\right) = -\cos\alpha$$

$$\tan\left(180^\circ - \alpha\right) = -\tan\alpha$$

a) Cermati segitiga *POR*.
Panjang sisi *PO* = 6, dan *OR* = 6.

$$\tan\alpha = \frac{OR}{PO} = \frac{6}{6} = 1$$

Nilai $\tan\alpha$ tersebut, mari kita bandingkan dengan gradien garis l_1: $y - x = 6$. ; $m_1 = 1$.

Hubungan m_1 dengan nilai, $\tan\alpha$ dituliskan sebagai berikut; $m_1 = \tan\alpha$.

b) Dengan cara yang sama untuk segitiga *SQO*, diketahui panjang sisi *QO* dan *OS* berturut-turut adalah 8 dan 8. Oleh karena itu,

$$\tan\left(180^\circ - \beta\right) = \frac{OQ}{OS} = \frac{8}{8} = 1$$

Gradien garis l_2: $x + y = 8$. ; $m_2 = -1$.

Hubungan m_2 dengan nilai $\tan\left(180^\circ - \beta\right)$ dituliskan sebagai berikut:
$m_2 = \tan\left(180^\circ - \beta\right) = -\tan\beta$.

Bepikir Kritis

- Dari pembahasan contoh 4.1 , kesimpulan apa yang dapat ditarik ?
- Cermati kembali Gambar 4.7, coba tentukan nilai tangen sudut *PTQ*!

Pertanyaan Menantang:

Diberikan persamaan garis:

l_1: $x + y = 3$

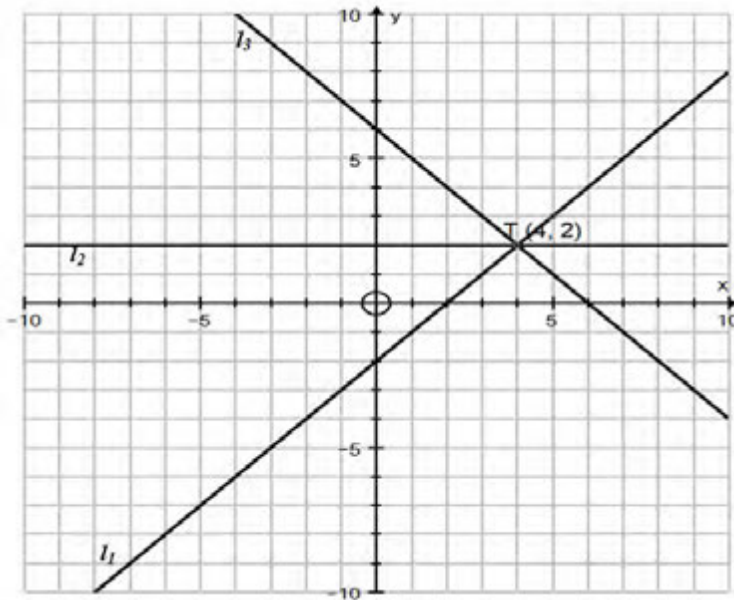
l_2: $-x + y = 3$

l_3: $x - y = 3$

l_4: $x + y = -3$

Hitunglah besar sudut yang dibentuk setiap garis dengan sumbu-*x*.

Uji Kompetensi 4.1

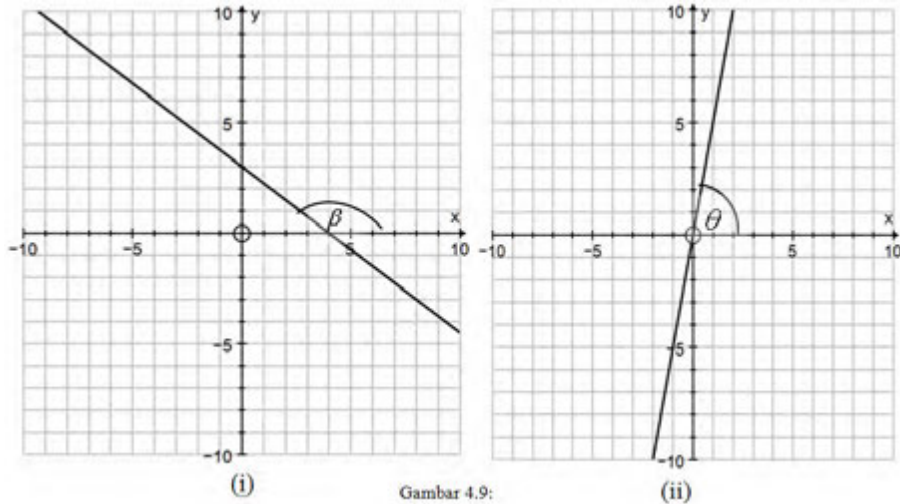
1. Tentukan gradien setiap garis pada grafik berikut ini.

Jika ada garis yang tidak memiliki gradien, berikan alasannya!

2. Tentukan nilai p untuk setiap koordinat di bawah ini.
   a. A (2,p) dan B(2,2p – 3) dengan m = 7.
   b. A (12 – 3p,4) dan B(8,7p – 3) dengan m = 5.
   c. A (5 – 6p,3p) dan B(8,7p – 3) dengan $m = \frac{1}{2}$.

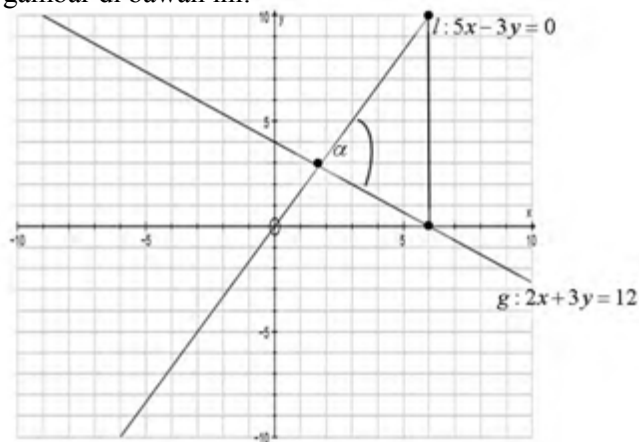
3. Jika $P\left(x_p, y_p\right)$ dan $Q\left(x_p, y_p\right)$, tentukan syarat yang harus dipenuhi agar garis yang melalui titik tersebut memiliki gradien yang positif.

4. Tentukanlah nilai k untuk setiap persamaan garis berikut, untuk
   a. $g_1 : (3k)x - 6y = 20$ dengan gradiennya sama dengan gradien $g_2 : x - 2y = 16$.

b. $l_1 : (3k+2)x + ky = 12$ dengan gradiennya sama dengan gradien $. l_2 : -7x + (k-6)y = 16$

5. Cermati grafik berikut ini.

Gambar 4.9:

Tentukan persamaan garis untuk masing-masing garis pada gambar (i) dan (ii). Selanjutnya hitunglah nilai tangen setiap sudut yang diberikan pada gambar.

6. Perhatikan gambar di bawah ini.

Gambar 4.10

Tentukan besar sudut α .

7. Diberikan dua persamaan garis:

   $l: 2x + 3y = 6$
   $g: 4x - 5y = 0$

   Tentukan nilai sinus sudut yang dibentuk oleh garis l dan g .

8. Gradien suatu garis sama dengan nilai tangen sudut yang dibentuk garis dengan sumbu X. Tentukan persamaan garis melalui titik potong garis $3x + 4y = 12$ dan $x - 4y = 0$ dan memiliki gradien sama dengan nilai tangen sudut pada soal No.6.

9. Diberikan dua persamaan garis:

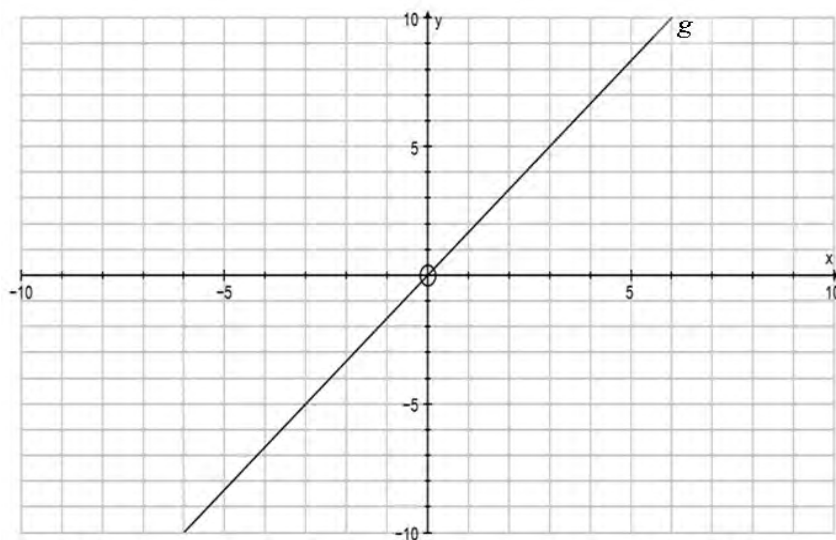
   $l_1 : a_1x + b_1y = c_1$; $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$ dan $l_2 : a_2x + b_2y = c_2$; $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$.
   $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ bilangan real.

   Tentukan syarat yang harus dipenuhi apabila:

   a. $m_1 > m_2$

   b. $m_1 < m_2$

   dimana: m_1 : gradien garis l_1 dan m_2 : gradien garis l_2.

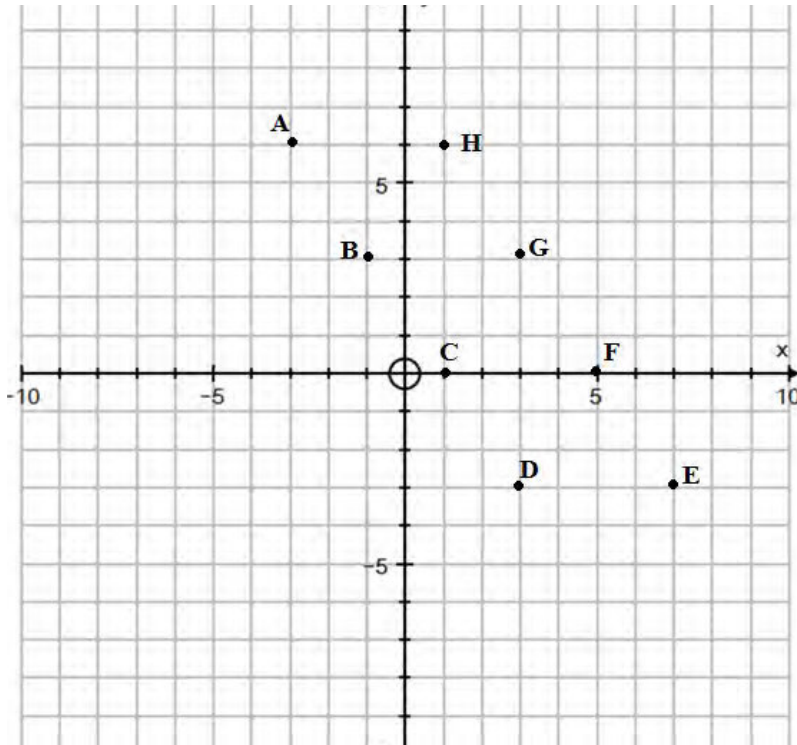
10. Perhatikan gambar garis di bawah ini.

Gambar 4.11

Tentukanlah persamaan garis paling sedikit dua garis yang:

a. Sejajar dengan garis g b. Tegak lurus dengan garis g

2. Hubungan Antar Garis

a. Garis Garis Sejajar

Perhatikan titik-titik yang terdapat pada bidang kartesius berikut ini.

Gambar 4.12

- Dari gambar di atas, coba tarik garis yang melalui minimal tiga titik. Kemudian tentukan persamaan garis yang kamu peroleh.
- Dari gambar di atas, coba tarik garis yang melalui dua titik. Kemudian tentukan persamaan tiap-tiap garis yang kamu peroleh.
- Dari semua garis yang kamu peroleh, adakah kamu temukan titik potong garis-garis tersebut?

  Bandingkan hasil kerjamu dengan temanmu.

Dari Gambar 4.12, dapat kita tentukan persamaan garis yang melalui titik A (-3,6) dan D(3,-3).

$$\frac{y-(-3)}{x-3} = \frac{6-(-3)}{-3-3} \Leftrightarrow \frac{y+3}{x-3} = \frac{-3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3x + 2y = 3$$

Sebut $l_1 : 3x + 2y = 3$

- Selidiki apakah garis l_1 melalui titik B(-1,3) dan titik C(1,0)!

Dengan persamaan garis $l_1 : 3x + 2y = 3$, bandingkan dengan persamaan garis yang kamu peroleh.

Persamaan garis l_2 : $3x + 2y = 15$ melalui titik E(7,-3) dan titik H(1,6) (selidiki!). Selain itu, garis l_2 juga melalui titik G(4,3) dan titik F(5,0).

- Melalui grafik garis l_1 dan l_2, kemudian tentukan gradien kedua garis, dan analisis gradien kedua garis tersebut.

Selanjutnya, dari hasil kerja menentukan persamaan garis yang melalui dua titik, kita peroleh persamaan-persamaan berikut ini:

i. $l_3 : 2y - 3x = 9$ merupakan persamaan garis yang melalui titik B(-1,3) dan H(1,6).
ii. $l_4 : 3x - 2y = 3$ merupakan persamaan garis yang melalui titik C(1,0) dan G(3,3).
iii. $l_5 : 3x - 2y = 15$ merupakan persamaan garis yang melalui titik D(3,-3) dan F(5,0).
iv. $l_6 : x + 2y = 9$ merupakan persamaan garis yang melalui titik A(-3,6) dan G(3,3).
v. $l_7 : x + 2y = 5$ merupakan persamaan garis yang melalui titik B(-1,3) dan F(5,0).
vi. $l_8 : x + 2y = 1$ merupakan persamaan garis yang melalui titik C(1,0) dan E(7,-3).

Pada kesempatan ini, kita tidak mengkaji garis-garis horizontal dan garis-garis vertikal

- Dari persamaan garis, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7, dan l_g, selidiki pasangan garis yang saling sejajar. Tunjukkan grafik dan hubungan gradien setiap pasangan garis.

- Pada Kelas X, kita telah mengkaji tentang sistem persamaan linear dua variabel. Coba kamu ingat kembali, apa syarat yang harus dipenuhi sistem;

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= c \\ rx + sy &= t \end{aligned}\right\}$$

agar memiliki himpunan penyelesaian dan tidak memiliki himpunan penyelesaian. Jika memiliki himpunan penyelesaian, apakah tunggal atau banyak?

Dari pembahasan di atas, mari kita tarik kesimpulan tentang dua garis yang saling sejajar.

Contoh 4.2

a) $\left.\begin{array}{r} 2x - y = 1 \\ x + 3y = 4 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x - 5y = 15 \\ -6x + 10y = 15 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 3x - 2y = 14 \\ 2x + 3y = 5 \end{array}\right\}$

Latihan Mandiri

Tentu kamu masih ingat bagaimana memeriksa sistem yang memiliki solusi (tunggal atau banyak), dan yang tidak memiliki solusi.

Perhatikan sistem a)!

Dimisalkan: l_{1a} : $2x - y = 1$;

l_{1b} : $x - 3y = 4$.

Pada garis l_{1a}, perbandingan nilai koefisien variabel x dan y ($m_{1a} = 2$) tidak sama dengan perbandingan nilai koefisien variabel x dan y ($m_{1b} = -\frac{1}{3}$) pada garis l_{1b}. Kondisi ini juga merupakan tanda bahwa sistem persamaan a) memiliki penyelesaian.

Untuk sistem persamaan b),

l_{2a}: $3x - 5y = 15$

l_{2b}: $-6x + 10y = 15$

Pada garis l_{2a}, perbandingan nilai koefisien variabel x dan y ($m_{2a} = \frac{3}{5}$) sama dengan perbandingan nilai koefisien variabel x dan y ($m_{2a} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$) pada garis l_{2b}. Hal ini memiliki arti bahwa, garis l_{2a} dan l_{2b} tidak pernah melalui satu titik yang sama. Oleh karena itu, sistem b) tidak memiliki penyelesaian.

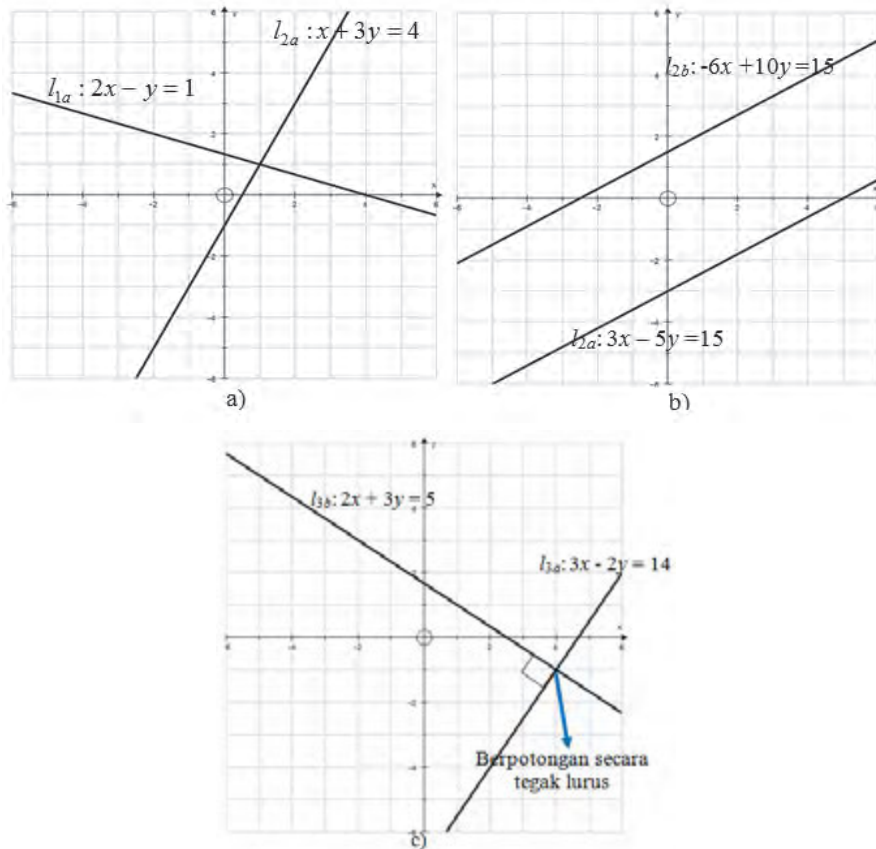
Selanjutnya, sistem persamaan c),

l_{3a}: $3x - 2y = 14$

l_{3b}: $2x + 3y = 5$

Perbandingan nilai koefisien variabel x dan y ($m_{3a} = \frac{3}{2}$) pada garis l_{3a} berbanding terbalik dengan perbandingan nilai koefisien variabel x dan y ($m_{3b} = -\frac{2}{3}$) pada garis

l_{3b}, serta hasil kalinya sama dengan -1. Dengan kondisi ini, secara sistem persamaan, sistem c) memiliki penyelesaian tunggal.

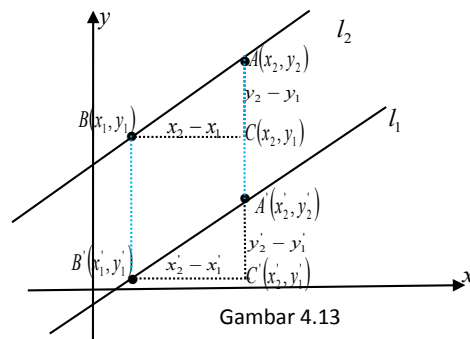
Secara grafik, kondisi sistem a), b), dan c) disketsakan sebagai berikut.

Gambar 4.13: Grafik sistem persamaan linear

Secara umum, misalkan garis

$g_1 : ax + by = c; a \neq 0$ dan $b \neq 0$

$g_2 : rx + sy = t; r \neq 0$ dan $s \neq 0$

: a, b, c, r, s, t merupakan bilangan real.

Garis g_1 sejajar dengan g_2 jika dan hanya $\frac{a}{r} = \frac{b}{s}$. Dengan kata lain, Garis sejajar dengan jika dan hanya $m_1 = m_2$.

Gambar 4.13

Secara geomteris, kondisi dua garis sejajar dideskripsikan sebagai berikut.

Misal, garis l_1 melalui titik $A'(x_1', y_1')$ dan $B'(x_2', y_2')$, dengan gradien m_1. Garis l_2 melalui titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$ dengan gradien m_2.

Mari kita cermati segitiga ABC dan $A'B'C'$. Kedua segitiga tersebut merupakan dua segitiga yang sebangun.

Oleh karena itu berlaku:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'} \text{ atau } m_1 = m_2$$

Selain itu, jarak titik A ke titik A' sama dengan jarak titik B ke titik B'. Kondisi ini semakin memperkaya bukti bahwa garis l_1 sejajar dengan garis l_2.

Dengan demikian, sifat dua garis sejajar dinyatakan dalam sifat berikut.

Sifat 4.1

Misalkan garis $g_1 : ax + by = c$; $a \neq 0$ dan $b \neq 0$ dengan gradien m_1
$g_2 : rx + sy = t$; $r \neq 0$ dan $s \neq 0$ dengan gradien m_2

a, *b*, *c*, *r*, *s*, *t* merupakan bilangan real.

Garis g_1 sejajar dengan g_2 jika dan hanya jika gradien kedua garis sama.

Secara matematis dinotasikan: $g_1 // g_2 \leftrightarrow m_1 = m_2$.

Dari Sifat 4.1, mari kita cermati hubungan di antara koefisien-koefisien *a*, *b*, *c*, *r*, *s*, dan *t*. Karena $m_1 = m_2$, dapat kita tulis bahwa $\frac{a}{b} = \frac{r}{s}$ atau $\frac{a}{r} = \frac{b}{s}$. Ingat, walaupun $\frac{a}{r} = \frac{b}{s}$, tetapi tidak berlaku bahwa $\frac{a}{r} = \frac{c}{t}$ atau $\frac{b}{s} = \frac{c}{t}$ $\frac{b}{s} = \frac{c}{t}$ (mengapa?).

Perlakuan-perlakuan ini dapat kita simpulkan dalam sifat berikut ini.

Sifat 4.2

Misalkan garis $g_1 : ax + by = c$; a ≠ 0, b ≠ 0 dan c ≠ 0 dengan gradien m_1
$g_2 : rx + sy = t$; r ≠ 0, s ≠ 0 dan t ≠ 0 dengan gradien m_2

a, *b*, *c*, *r*, *s*, *t* merupakan bilangan real.

Jika $\frac{a}{r} = \frac{b}{s} = \frac{c}{t}$ maka garis g_1 berimpit dengan garis g_2.

Untuk lebih memantapkan pemahaman kita akan hubungan dua garis yang sejajar, mari kita cermati contoh berikut ini.

Contoh 4.3

a) Tentukan persamaan garis lurus yang melalui titik potong garis-garis dengan persamaan $3x + 2y = 12$ dan $5x + 2y = 16$ serta sejajar dengan garis $2x + y = 4$.
b) Carilah nilai k sedemikian sehingga garis $kx - 3y = 10$ sejajar dengan garis $2x + 3y = 6$.

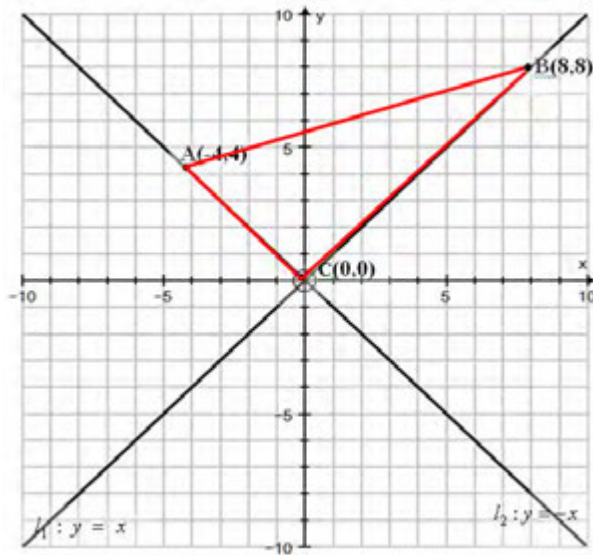
Alternatif Penyelesaian

a) Terlebih dahulu kita menentukan titik potong garis $3x + 2y = 12$ dan $5x + 2y = 16$. Dengan cara eliminasi ataupun subsitusi, diperoleh titik potong kedua garis tersebut (2, 3). Misal, garis g merupakan garis yang melalui titik (2, 3), serta sejajar dengangaris $2x + y = 4$ maka gradien garis , sebut $m_g = -2$ Jadi persamaan garis g, diperoleh:
$y - 3 = -2(x - 3)$ atau $2x + y = 3$.

b) Karena garis, $kx - 3y = 10$ sebut g_1, sejajar dengan garis $2x + 3y = 6$, sebut g_2 maka $m_{g1} = m_{g2}$. Akitanya $\frac{k}{3} = -\frac{2}{3}$, atau k = –2. Dengan demikian dapat kita tulis bahwa garis $-2x - 3y = 10$ sejajar dengan $2x + 3y = 6$.

b. Garis-Garis Tegak Lurus

Perhatikan grafik berikut ini.

Sekarang mari kita amati segitiga ABC. Kita akan selidiki apakah segitiga ABC merupakan segitiga siku-siku atau tidak. Tentu, sudut yang diduga merupakan sudut siku-siku adalah sudut ACB. Dengan menggunakan alat pengukur sudut (busur) atau penggaris berbentuk segitiga siku-siku, sudut ACB merupakan sudut-sudut siku-siku.

Gambar 4.14: Garis l_1 dan l_2 berpotongan secara tegak lurus.

Oleh karena itu, dapat kita tarik kesimpulan bahwa garis l_1 memotong secara tegak lurus garis l_2.

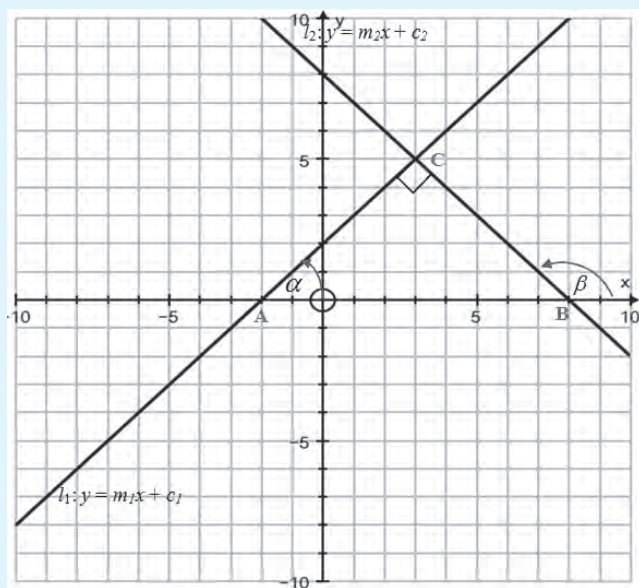
Selanjutnya, akan kita selidiki hubungan gradien garis $l_1(m_1)$ dan gradien garis $l_2(m_2)$.

$l_1 : y = x$, dengan $m_1 = 1$;

$l_2 : y = –x$, dengan $m_2 = 1$.

Ternyata, $m_1.m_2 = –1$.

Masalah-4.1

Perhatikan gambar berikut ini!

Gambar 4.15: Garis l_1 dan l_2 , dengan gradien berbeda tanda berpotongan secara tegak lurus.

Garis $l_1: y = m_1x + c_1$ mempunyai gradien, sedangkan garis $l_2: y = m_2x + c_2$ mempunyai gradien tan $\beta = m_2$.

Selidiki bahwa hubungan gradien garis l_1 dengan l_2!

Alternatif Penyelesaian

Diketahui garis l_1: $y = m_1x + c_1$ mempunyai gradien, sedangkan garis l_2: $y = m_2x + c_2$ mempunyai gradien tan $\beta = m_2$.

Cermati segitiga siku-siku ABC!

Karena $\angle$ A = α dan $\angle$ C = 90^0 maka $\angle$ B = 180^0 β. Oleh karena itu $\beta = (90^0 + \alpha)$ (tunjukkan!).

Diketahu tan $\beta = m_2$.

Akibatnya:

$\tan = (90^0 + \alpha) = m_2$

$\leftrightarrow -\dfrac{1}{\tan\alpha} = m_2$

$\leftrightarrow -\dfrac{1}{m_1} = m_2$

Ingat

$\tan(90^0 + \alpha) = -\dfrac{1}{\tan\alpha}$

diperoleh: $m_1.m_2 = -1$

Dengan demikian, syarat dua garis yang saling tegak lurus dinyatakan dalam sifat berikut ini.

Sifat 4.3

Misalkan garis g_1 : $bx - ay = t$; $a \neq 0$ dan $b \neq 0$ dengan gradien $m_1 = \dfrac{b}{a}$

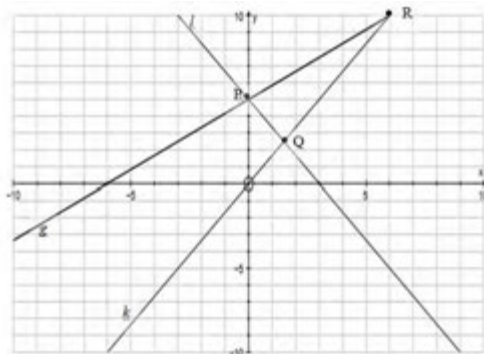
g_2 : $ax - by = c$;$a \neq 0$ dan $b \neq 0$ dengan gradien $m_2 = -\dfrac{a}{b}$

a, *b*, *c*, merupakan bilangan real maka:

Garis g_1 berpotongan tegak lurus dengan garis g_2, dinotasikan $g_1 \perp g_2$.

Contoh 4.4

Mari kita cermati grafik di bawah ini!

Selidiki hubungan antar garis yang berlaku.

Gambar 4.16

Alternatif Penyelesaian

Langkah awal, dengan memperhatikan pasangan titik koordinat yang dilalui tiap-tiap garis, kita dapat menentukan persamaan dan gardien setiap garis.

$l : 5x + 3y = 15$, dengan $m_l = -\frac{5}{3}$

$g : 6y - 5x = 30$, dengan $m_g = \frac{5}{6}$

$k : 5x - 3y = 0$, dengan $m_k = \frac{5}{3}$.

Latihan 4.1

Sebagai latihan secara mandiri,

- selidiki apakah garis l dan garis k berpotongan secara tegak lurus?
- selidiki juga hubungan garis l dan garis g!

Diskusikan hasil kerjamu dengan temanmu.

Uji Kompetensi 4.2

1. Selidikilah hubungan setiap pasangan garis dengan persamaan di bawah ini.
   a. $g_1 : -2x + 5y = 7$ dan $g_2 : 3x - 4y = 12$.
   b. $l_1 : ax + by = c$ dan $l_2 : px + qy = s$, dengan $a < b$ dan $p > q$, $a, b, p, q \in R$.
2. Penelitian terbaru menunjukkan bahwa suhu rata-rata permukaan Bumi meningkat secara teratur. Beberapa peneliti memodelkan suhu permukaan Bumi sebagai berikut: $T = 0.02t + 8.50$, T menyatakan suhu dalam ^{0}C dan t menyatakan tahun sejak 1900.
   a. Tentukan kemiringan garis tersebut, dan interpretasikan bilangan tersebut.
   b. Dengan menggunakan persamaan tersebut, prediksilah rata-rata perubahan suhu pada tahun 2200
3. Seorang manager perusahaan perabot harus menyediakan modal sebesar Rp22.000.000,00 untuk memproduksi 100 kursi kantor dan Rp48.000.000,00 untuk memproduksi 300 kursi yang sama.

a. Nyatakanlah biaya tersebut sebagai persamaan kursi yang diproduksi, dengan mengasumsikan hubungan antara biaya dan banyak kursi adalah linear.

Kemudian gambarkan.

b. Tentukan gradiennya, dan jelaskan arti bilangan itu.

c. Dari sketsa, jelaskan makna grafik tersebut.

4. Perhatikan persamaan garis di bawah ini!

   $g_1 : ax + by = c$ dan $g_2 : px + qy = t$, $a, b, p, q \in$ R.

   Tunjukkan hubungan antara koefisien a, b dengan p, q agar $g_1 // g_2$

5. Tentukanlah k untuk setiap persamaan garis berikut.

   a. $g_1 : (2 - k)x - y = 8$ dan $g_2 : (4 + k)x + 3y = 12$ agar $g_1 \perp g_2$.

   b. $l_1 : (3k + 5)x - 2y = 10$ dan $l2 : (-k - 3)x - 7y = 14$ agar $g_1 // g_2$.

6. Tentukan persamaan garis l_1 yang melalui titik (–7, 3) dan tegak lurus dengan garis $l_2 : 3x - 5y = 12$. Kemudian gambarkan grafiknya.

7. Diberikan dua garis dengan persamaan yang diperoleh dari matriks berikut:

   $$\begin{pmatrix} -3 & p \\ q & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   Tentukan perbandingan p dan q jika kedua garis saling tegak lurus.

8. Diketahui titik $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$, C dan AB adalah titik tengah. Tentukan persamaan garis yang tegak lurus AB dan melalui titik C

9. Diketahui P(3,3), Q(4,-1) dan R(-8,-4). Tentukan besar sudut perpotongan garis PQ dan QR.

10. Diberikan garis l : $(x - 2y) + a(x + y) = 5$ dan garis $g : (5y - 3x) - 3a(x + y) = 12$.

    Tentukan nilai a agar:

    a. $l // g$

    b. $l \perp g$

Projek

Cari masalah dalam kehidupan sehari (minimal dua masalah nyata) yang menerapkan hubungan dua garis yang saling sejajar dan dua garis yang berpotongan secara tegak. Deskripsikan kebermaknaan garis tersebut dalam kehidupan sehari-hari.

Susunlah hasil temuanmu dalam bentuk laporan hasil kinerja suatu proyek. Kamu diberikan waktu satu minggu untuk menuntaskannya secara baik dan teliti.

D. PENUTUP

Beberapa hal penting yang perlu dirangkum terkait sifat-sifat persamaan garis lurus adalah sebagai berikut.

1. Persamaan linear, biasanya dinyatakan dalam bentuk $ax + by = c$, dengan a, b, c merupakan bilangan riil. Model matematika permasalahan sehari-hari, khususnya dalam masalah ekonomi sering menjadi masalah yang terkait persamaan garis lurus.
2. Konsep dan sifat-sifat persamaan garis ini didasari oleh konsep persamaan linear dua variabel. Setiap garis, $ax + by = c$, memiliki kemiringan atau disebut gradien yang dinotasikan dengan m, kecuali garis vertikal. Gradien tersebut sama dengan nilai tangen sudut yang dibentuk garis terhadap sumbu x positif.
3. Garis $l : ax + by = c$ dikatakan sejajar dengan garis $g : px + qy = t$ jika dan hanya jika kedua garis tidak pernah berpotongan atau memiliki gradien yang sama. Dikatakan saling tegak lurus jika dan hanya jika kedua garis berpotongan dan hasil kali gradiennya sama dengan -1.

Penguasaan kamu tentang persamaan garis lurus sangat penting bermanfaat untuk bahasan persamaan garis singgung pada lingkarang dan persamaan singgung pada kurva. Untuk penerapan persamaan garis lurus lebih banyak digunakan pada kajian persamaan garis singgung lingkaran dan persamaan garis singgung kurva. Sifat-sifat garis lurus akan dibahas secara mendalam dan dimanfaatkan dalam penyelesaian masalah matematika dan masalah otentik.

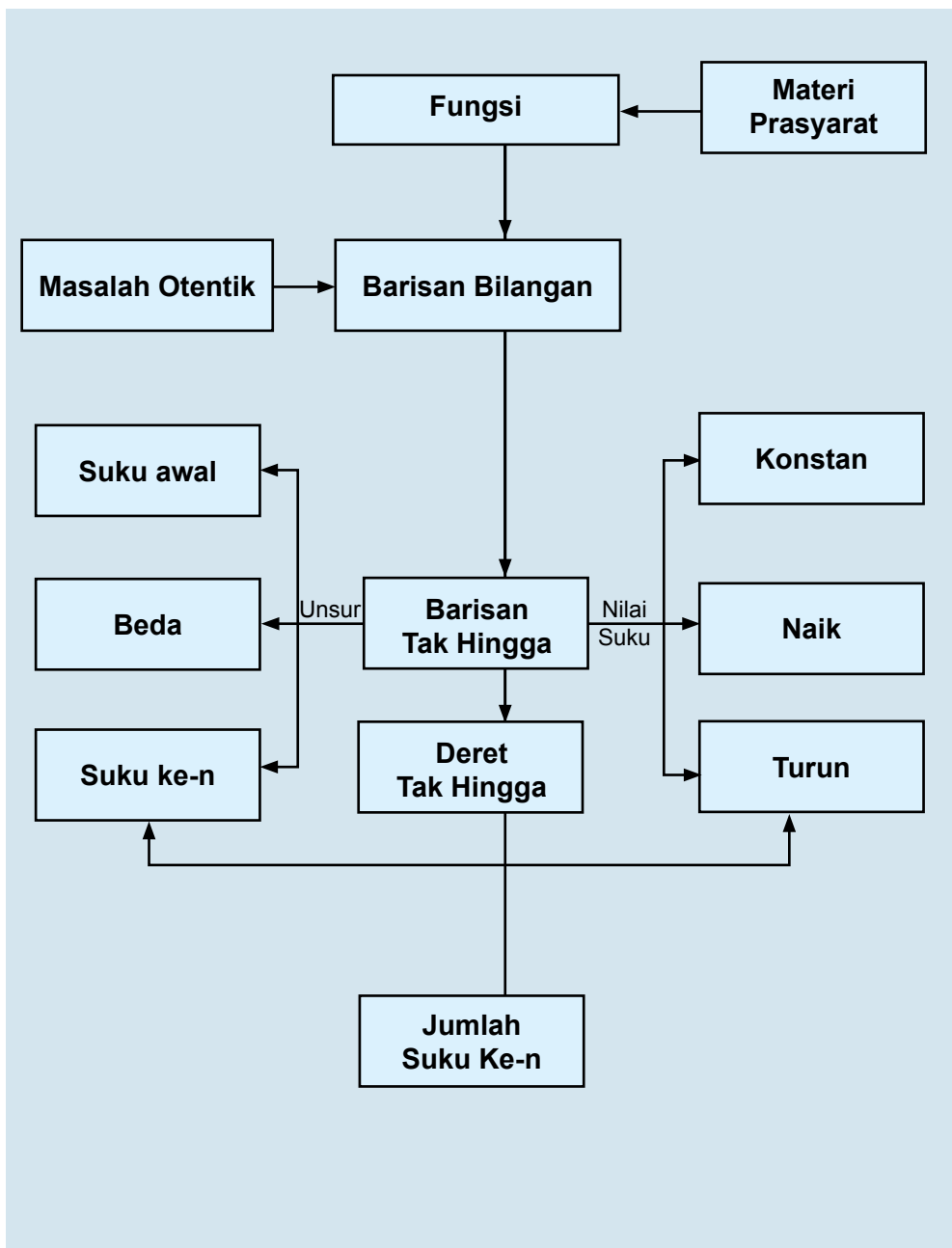
BARISAN DAN DERET TAK HINGGA

A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
1. Memiliki motivasi internal, kemampuan bekerjasama, konsisten, sikap disiplin, rasa percaya diri dan sikap toleransi dalam perbedaan strategi berfikir dalam memilih dan menerapkan strategi menyelesaikan masalah. 2. Mendeskripsikan konsep barisan dan deret tak hingga sebagai fungsi dengan daerah asal himpunan bilangan asli. 3. Menerapkan konsep barisan dan deret tak hingga dalam penyelesaian masalah sederhana.	Melalui pembelajaran materi barisan dan deret aritmetika dan geometri atau barisan lainnya, siswa memperoleh pengalaman belajar: • Menemukan konsep dan pola barisan dan deret melalui pemecahan masalah otentik. • Berkolaborasi memecahkan masalah aktual dengan pola interaksi sosial kultur. • Berpikir tingkat tinggi (berpikir kritis, kreatif) dalam menyelidiki dan mengaplikasikan konsep dan pola barisan dan deret tak hingga dalam memecahkan masalah otentik

Istilah Penting

- *Pola Bilangan*
- *Beda*
- *Rasio*
- *Barisan Tak Hingga*
- *Barisan Konstan, Naik, dan Turun*
- *Deret Tak Hingga*
- *Jumlah suku tak hingga*

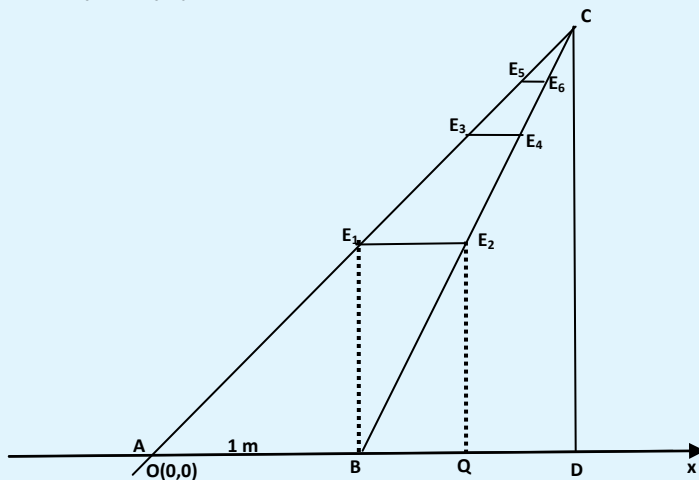
B. PETA KONSEP

C. MATERI PEMBELAJARAN

1. Menemukan Konsep Barisan dan Deret Tak Hingga.

Amati dan kritisi masalah nyata kehidupan yang dapat dipecahkan secara arif dan kreatif melalui proses matematisasi. Dalam proses pembelajaran barisan dan deret tak hingga berbagai konsep dan aturan matematika terkait barisan akan ditemukan melalui pemecahan masalah, melihat pola susunan bilangan, menemukan berbagai strategi sebagai alternatif pemecahan masalah.

Dalam mempelajari materi pada bab ini, ingat kembali barisan dan deret aritmatika (geometri) yang sudah kamu pelajari di kelas X. Kita akan mempelajari beberapa kasus dan contoh yang berkaitan dengan barisan dan deret tak hingga pada bab ini. Barisan suatu obyek membicarakan masalah urutannya dengan aturan tertentu. Aturan yang dimaksud adalah pola barisan. Kita memerlukan pengamatan terhadap suatu barisan untuk menemukan pola. Selanjutnya cermati masalah berikut.

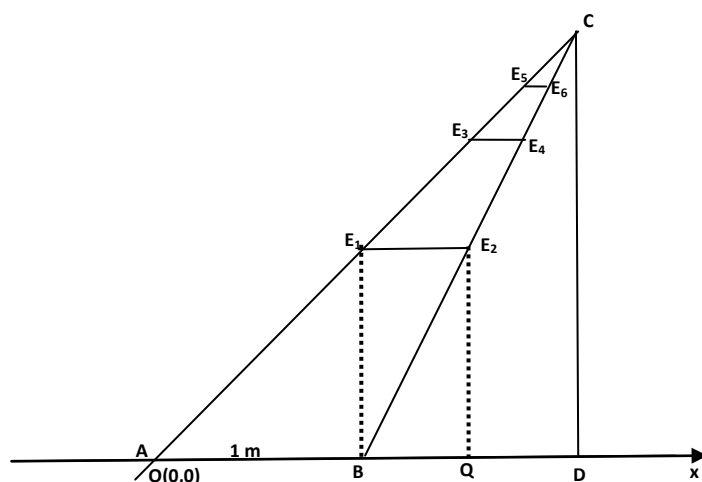
Masalah-5.1

Dua potong kawat besi disandarkan pada sebuah dinding rumah tempat bunga menjalar. Di antara kedua kawat dibuat potongan–potongan kawat E_1E_2, E_3E_4, E_5E_6, dan seterusnya seperti terlihat pada gambar berikut.

Gambar-5.2. Posisi Kawat Tersandar di Dinding Rumah

Kemiringan posisi kawat sebelah kiri adalah r dengan $0 < r < 1$, $r \in R$ dan kemiringan kawat sebelah kanan adalah 1. Jarak kedua kawat di tanah adalah 1 meter dan jarak $BE_1 = QE_2$ adalah r meter.

a. Tentukan panjang potongan kawat E_1E_2, E_3E_4, E_5E_6, dan seterusnya dalam r.
b. Temukan susunan bilangan dalam r yang menyatakan jarak dari titik A ke titik B, jarak titik B ke Q dan seterusnya sampai ke titik D!
c. Tentukan fungsi yang menyatakan susunan bilangan dalam r!
d. Tentukan jarak titik dari A ke D!

Alternatif Penyelesaian

Mari kita gambarkan posisi kawat besi dalam sumbu koordinat.

Gambar-5.2. Posisi Kawat Tersandar di Dinding Rumah

Koordinat titik $A(0,0)$ dan $B(1,0)$ adalah dua titik yang berada pada sumbu x. Karena ruas garis AC (kawat sebelah kiri) memiliki gradien r dengan $0 < r < 1$ dan ruas garis BC (kawat sebelah kanan) memiliki gradien 1, maka kedua ruas garis bertemu pada satu titik, yaitu titik C.

Misalkan titik E_1 pada ruas garis AC. Karena ruas garis AC bergradien r dan panjang AB adalah 1 maka panjang BE_1 adalah r. Titik E_2 berada pada ruas garis BC, karena gradien BC adalah 1, maka panjang E_1E_2 adalah r dan panjang $E_1E_2 = BQ = r$.

- Karena gradien garis AC adalah r dan panjang $E_1E_2 = r$, maka panjang $E_2E_3 = r^2$.
- Karena gradien garis BC adalah 1, maka panjang $E_3E_4 = r^2$ dan $QR = r^2$.

Dengan cara yang sama, diperoleh panjang $E_5 E_6 = r^3$ dan jika kita tambahkan potongan kawat di antara garis AC dan BC di atas E_5E_6 menuju titik C, maka diperoleh panjang potongan kawat berikutnya r^3, r^4, r^5, …. Mengapa?

a. Panjang E_1E_2, E_3E_4, E_5E_6, dan seterusnya dalam r adalah r, r^2 r^3, r^4, r^5, …

b. Susunan bilangan dalam r yang menyatakan jarak titik A ke titik B, titik B ke Q, titik Q ke R dan seterusnya sampai ke titik D, yaitu: 1, r, $r^{2,}$ r^3, …, dengan $0 < r < 1$.

c. Fungsi yang menyatakan susunan bilangan pada bagian (b) adalah $u(n) = r^{n-1}$, $n \in N$.

d. Panjang AD adalah hasil penjumlahan 1, r, r^2, r^3, …

$$AD = 1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} \text{ dengan } 0 < r < 1$$

Perhatikan Gambar-5.2 di atas, dengan menggunakan aturan dalam trigoniometri, diperoleh jarak $BD = CD = r + r^2 + r^3 + r^4 + \ldots$

Misalkan $s = 1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \ldots$

Karena panjang ruas garis $BD = r + r^2 + r^3 + r^4 + \ldots = s - 1$, maka $CD = s - 1$

Perhatikan $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{CD}{BE_1}$ atau $\dfrac{s}{1} = \dfrac{s-1}{r}$.

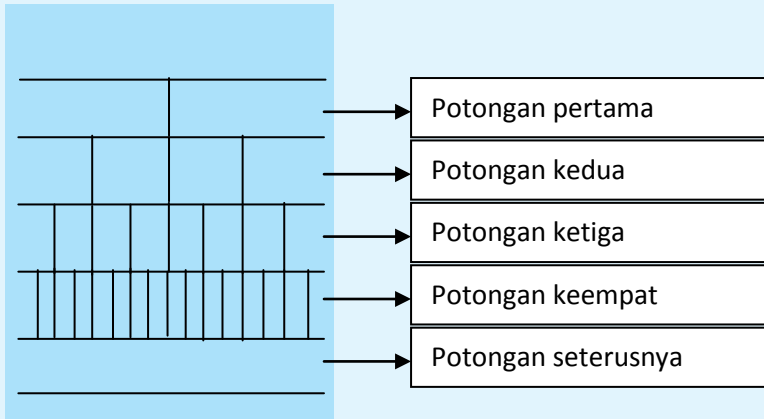
$$\frac{s}{1} = \frac{s-1}{r} \Leftrightarrow rs = s - 1$$

$$\Leftrightarrow (1 - r)s = 1$$

$$\Leftrightarrow s = \frac{1}{1-r}$$

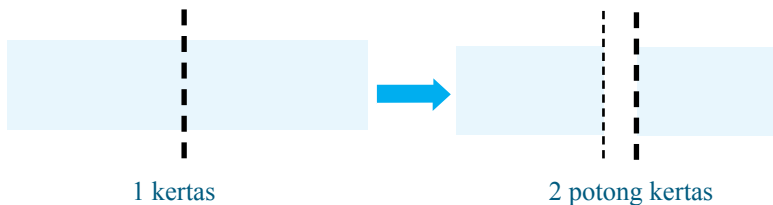
Berdasarkan uraian di atas panjang $AD = s = \dfrac{1}{1-r}$, dengan $0 < r < 1$. Panjang segmen garis AD ini dapat diartikan jumlah takhingga suku-suku barisan *1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, …*

Masalah-5.2

Siti menggunting kertas menjadi dua bagian yang sama besar. Potongan kertas berikutnya digunting lagi menjadi dua bagian yang sama besar, seperti gambar berikut.

Susunlah bilangan-bilangan yang menyatakan banyak potongan kertas, apabila potongan kertas berikutnya digunting dua bagian yang sama.

Alternatif Penyelesaian

Siti menggunting kertas tersebut menjadi dua bagian yang sama besar

1 kertas   2 potong kertas

Dua potongan kertas di atas, digunting menjadi dua bagian yang sama besar untuk setiap potongan kertas sehingga diperoleh potongan kertas berikut.

Misalnya n menyatakan guntingan ke-n

Untuk $n = 1$, diperoleh banyak potongan kertas adalah 2

Untuk $n = 2$, diperoleh banyak potongan kertas adalah 4

Untuk $n = 3$, diperoleh banyak potongan kertas adalah 8

Untuk $n = 4$, diperoleh banyak potongan kertas adalah 16

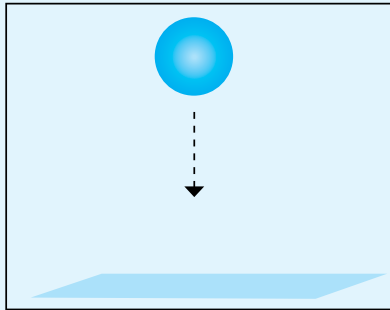
Jika guntingan kertas dilanjutkan maka akan diperoleh suatu susunan bilangan yang menyatakan banyak potongan kertas, yaitu: 2, 4, 8, 16, 32, … Susunan bilangan tersebut membentuk sebuah barisan tak hingga, dengan nilai suku-suku barisan dapat dinyatakan dengan sebuah fungsi $u(n) = 2^n$ dengan $n \in N$. Lengkapilah tabel berikut untuk melihat jumlah parsial dari susunan bilangan 2, 4, 8, 16, 32, ….

Tabel 5.2: Jumlah parsial suku-suku barisan $u(n) = 2^n$

Deret	Jumlah suku–suku	Jumlah Potongan Kertas
s_1	u_1	2
s_2	$u_1 + u_2$	6
s_3	$u_1 + u_2 + u_3$	
s_4	$u_1 + u_2 + u_3 + u_4$	
…	…	…
s_n	$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \ldots + u_n$	
…	…	…
s_n	$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \ldots + u_n + \ldots$	
…	…	…

Amati data pada tabel yang kamu temukan. Dapatkah kamu menentukan suku dengan $n = 20$? Berapa jumlah 2, 4, 8, 16, 32, …. , jika $n \to \infty$?

Masalah-5.3

Sebuah bola jatuh dari ketinggian 9 meter ke lantai yang disajikan pada gambar berikut

Gambar-5.3: Pantulan Bola

Bola memantul kembali secara terus menerus setinggi $\frac{2}{3}$ dari ketinggian sebelumnya.

a. Tentukanlah susunan bilangan yang menyatakan ketinggian pantulan bola tersebut!
b. Tentukan panjang lintasan yang dilalui bola setelah memantul ke lantai!

Alternatif Penyelesaian

a. Ditemukan susunan bilangan dari hasil pantulan bola.

Dari masalah diketahui bahwa ketinggian pantulan bola adalah $\frac{2}{3}$ dari ketinggian pantulan sebelumnya. Dengan demikian ketinggian yang dicapai bola untuk tiap-tiap pantulan ditentukan sebagai berikut.

Ketinggian bola awal = 9 m

Pantulan pertama $= \frac{2}{3} \times 9 = 6$

Pantulan kedua $= \frac{2}{3} \times 6 = 4$

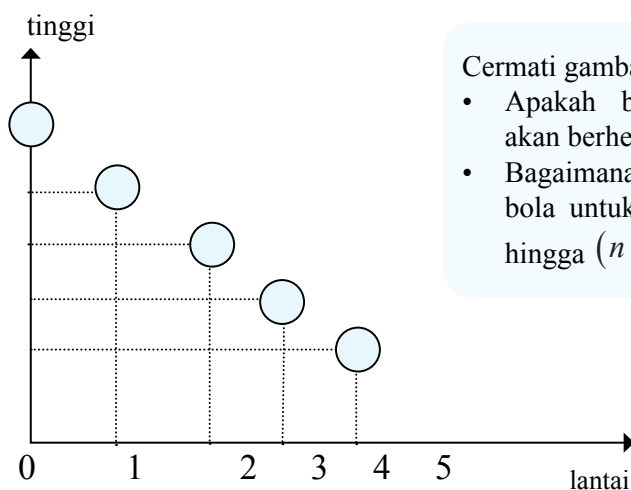
Pantulan ketiga $= \frac{2}{3} \times 4 = \frac{8}{3}$

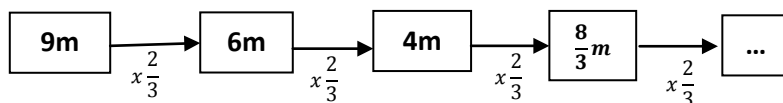
dan seterusnya …

Tabel 5.1 Tinggi Pantulan Bola

Pantulan ke	1	2	3	4	...
Tinggi pantulan (m)	6	4	8/3	16/9	...
Suku ke ...	u_1	u_2	u_3	u_4	...

- Coba kamu teruskan mengisi tabel pada pantulan berikutnya
- Apakah mungkin terjadi ketinggian pantulan bola sama dengan nol?

Pantulan bola diperlihatkan seperti gambar di bawah ini

Gambar-5.4: Posisi Pantulan Bola

Berdasarkan perhitungan dan gambar di atas diperoleh susunan bilangan menyatakan ketinggian pantulan bola, yaitu: 6, 4, $\frac{8}{3}$, $\frac{16}{9}$, $\frac{32}{18}$, ...

Rasio, dinotasikan r merupakan nilai perbandingan dua suku berdekatan. Nilai r dinyatakan: $r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3} = \ldots = \frac{u_n}{u_{n-1}}$. Jadi

$u_1 = 9.\ \frac{2}{3} = 6 \longrightarrow u_1 = a$

$u_2 = u_1 . \frac{2}{3} = 6.\ \frac{2}{3} = 4 \longrightarrow u_2 = u_1 . r = ar$

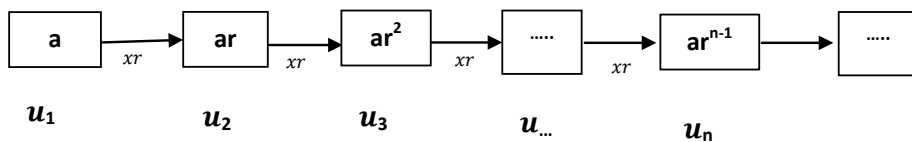
$u_3 = u_2 . \frac{2}{3} = 4.\ \frac{2}{3} = \frac{8}{3} \longrightarrow u_3 = u_2 . r = ar.r = ar^2$

$u_4 = u_3 . \frac{2}{3} = \frac{8}{3} . \frac{2}{3} = \frac{16}{9} \longrightarrow u_4 = u_3 . r = ar^2 . r = ar^3$

$u_5 = u_4 . \frac{2}{3} = \frac{16}{9} . \frac{2}{3} = \frac{32}{27} \longrightarrow u_5 = u_4 . r = ar^3 . r = ar^4$

Susunan bilangan $6, 4, \frac{8}{3}, \frac{16}{9}, \frac{32}{27}, \frac{64}{81}, \frac{128}{243}, \ldots$ dapat dinyatakan dalam sebuah fungsi $u(n) = 9(\frac{2}{3})^n$, dengan $n \in N$.

Susunan bilangan di atas dapat diekspresikan sebagai barisan tak hingga.

a	→	ar	→	ar^2	→	.....	→	ar^{n-1}	→	.....
u_1	xr	u_2	xr	u_3	xr	$u_{\ldots}$	xr	u_n		

b. Ditentukan panjang lintasan yang dilalui bola untuk 10 kali pantulan.

Misalkan panjang lintasan bola sampai pantulan ke-10 adalah S.

$$s = 2\left(u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_{10}\right)$$

$$\Leftrightarrow s = 2\left(u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_{10}\right) - u_1$$

$$\Leftrightarrow s = 2s_{10}$$

Tabel 5.2: Jumlah Parsial Lintasan Bola

Deret	Jumlah suku-suku	Nilai
s_1	u_1	6
s_2	$u_1 + u_2$	$6 + \frac{12}{3} = 6(\frac{5}{3}) = 6(\frac{9-4}{3})$
s_3	$u_1 + u_2 + u_3$	$6 + \frac{12}{3} + \frac{24}{9} = 6(\frac{19}{9}) = 6(\frac{27-8}{9})$
s_4	$u_1 + u_2 + u_3 + u_4$	$6 + \frac{12}{3} + \frac{24}{9} + \frac{48}{27} = 6(\frac{65}{27}) = 6(\frac{81-16}{125})$
...	...	...
s_n	$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n$	$s_n = 6(\frac{3^n - 2^n}{3^{n-1}})$

Berdasarkan tabel di atas deret bilangan tersebut adalah sebuah barisan jumlah, $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$ yaitu $6(\frac{3^1 - 2^1}{3^0})$, $6(\frac{3^2 - 2^2}{3^1})$, $6(\frac{3^3 - 2^3}{3^2})$, ... , $6(\frac{3^n - 2^n}{3^{n-1}})$

Jadi, panjang lintasan bola sampai pantulan ke-10 adalah $s=2s_{10}$ atau $s = 6(\frac{3^{10} - 2^{10}}{3^9})$

Perhatikan kembali susunan bilangan yang diperoleh dari Masalah-5.1, Masalah-5.2, dan Masalah-5.3, yaitu:

- $1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, \ldots$ yang dinyatakan dalam fungsi $u(n) = r^{n-1}$ dengan $n \in N$
- 2, 4, 8, 16, 32, … yang dinyatakan dalam fungsi $u(n) = 2^{n-1}$ dengan $n \in N$.
- $6, 4, \frac{8}{3}, \frac{16}{9}, \frac{32}{27}, \frac{64}{81}, \frac{128}{243}, \ldots$ yang dinyatakan dalam fungsi $u(n) = 9(\frac{2}{3})n$ dengan $n \in N$.

Berdasarkan beberapa model barisan bilangan di atas, dapat dipastikan bahwa barisan adalah sebuah fungsi dengan domainnya himpunan bilangan asli (N) dan rangenya adalah suatu himpunan (R_f) bagian dari S, ditulis $f : N \rightarrow S$, $R_f \subseteq S$.

Definisi 5.1

Barisan tak hingga objek di himpunan S adalah suatu fungsi u dengan daerah asal (*domain*) himpunan bilangan asli dan daerah hasilnya (*range*) suatu himpunan $R_u \subseteq S$. Ditulis $(u_n), n \subseteq N$.

Definisi 5.2

Misalkan (u_n) sebuah barisan tak hingga bilangan real dan $s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$ adalah jumlah parsial suku-suku barisan tak berhingga.

- Deret tak hingga adalah barisan jumlah parsial n suku barisan tak hingga. Ditulis (s_n), $n \in N$ atau $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$
- Jumlah deret tak hingga adalah jumlah suku-suku barisan tak hingga. Ditulis $\sum_{n=1}^{n=\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$

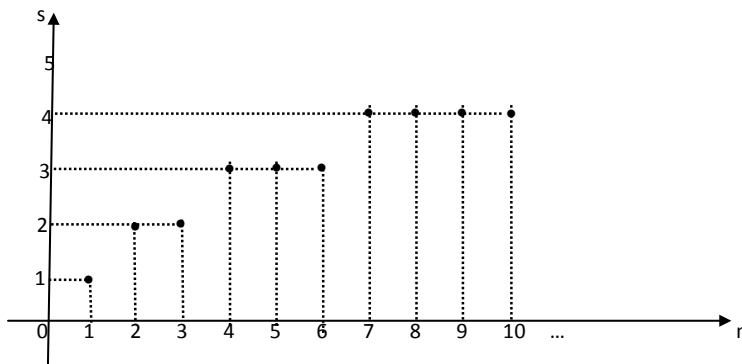
Contoh 5.1

Perhatikan barisan angka berikut:

1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, ...

Amatilah barisan angka tersebut terlebih dahulu! Tentukanlah angka pada urutan ke $4^4 \times 5^3$!

Alternatif Penyelesaian

Pertama, kita perlihatkan urutan setiap angka pada barisan, pada grafik berikut:

Gambar-5.5: Barisan Sebagai Fungsi

Jika kamu amati dengan teliti, kelompok angka 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4 pada urutan ke-1 sampai 10 berulang, bukan? Perulangan kelompok angka terjadi pada setiap kelipatan 10 angka pertama. Jadi, angka pada urutan ke-1 sama dengan angka pada urutan ke-11, urutan ke-21, urutan ke-31 dan seterusnya.

Kedua, angka pada urutan ke- $4^4 \times 5^3$ adalah angka pada urutan $256 \times 125 = 32.000$ atau $32000 = 3200 \times 10$ sehingga perulangan kelompok angka tersebut mengalami perulangan sebanyak 3200 kali. Dengan demikian, angka pada urutan ke-32000 adalah angka pada urutan ke-10 yaitu 4.

Contoh 5.2

Sebuah susunan angka dituliskan sebagai berikut:

246810121416182022242628303234363840... dengan memandang setiap angka adalah suku barisan bilangan sehingga suku ke-10 = 4, suku ke-11 = 1, suku ke-12 = 6 dan seterusnya. Dapatkah kamu temukan angka yang menempati suku ke-1457?

Alternatif Penyelesaian

Mari kita amati kembali barisan tersebut, dengan memandang setiap angka adalah suku-suku barisan, maka susunan barisan menjadi:

2	4	6	8	1	0	1	2	1	4	1	6	1	8	2	0	2	2	...	?
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	u_{16}	u_{17}	u_{18}	...	u_{2013}

u_n menyatakan suku ke-n pada barisan dengan $n = 1, 2, 3, 4, ...$

Kita akan menentukan angka pada suku ke-1457, dengan menghitung banyak suku pada bilangan satuan, puluhan, dan ratusan sebagai berikut:

Langkah 1. Mencari banyak suku pada barisan bilangan satuan (2 sampai 8): 2, 4, 6, 8
Banyak suku pada barisan bilangan satuan adalah $1 \times 4 = 4$ suku.

Langkah 2. Mencari banyak suku pada barisan bilangan puluhan (10 sampai 98)
10, 12, 14, 16, 18 terdapat 2 õ 5 suku = 10 suku
20, 22, 24, 26, 28 terdapat 2 õ 5 suku = 10 suku
...
90, 92, 94, 96, 98 terdapat 2 õ 5 suku = 10 suku

Banyak suku pada barisan bilangan puluhan adalah $9 \times 10 = 90$ suku. Jadi, banyak suku pada barisan 2 sampai 98 adalah $4 + 90 = 94$ suku.

Langkah 3. Menentukan banyak suku pada barisan bilangan ratusan (100 sampai 998)

100, 102, 104, 106, 108, ..., 198 terdapat 3 õ 50 suku = 150 suku
200, 202, 204, 206, 208, ..., 298 terdapat 3 õ 50 suku = 150 suku
300, 302, 304, 306, 308, ..., 398 terdapat 3 õ 50 suku = 150 suku
...
900, 902, 904, 906, 908, ..., 998 terdapat 3 õ 50 suku = 150 suku

Banyak suku untuk barisan bilangan ratusan dari mulai 100 sampai 998 adalah 9 × 150 = 1350 suku

Jadi terdapat sebanyak 4 + 90 + 1350 = 1444 suku pada barisan bilangan 2 sampai dengan 998 sehingga suku ke-1444 adalah 8. Suku berikutnya (suku ke-1457) adalah barisan bilangan dengan bilangan ribuan sebagai berikut.

9	9	8	1	0	0	0	1	0	0	2	1	0	0	4	1	
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	...
u_{1442}	u_{1443}	u_{1444}	u_{1445}	u_{1446}	u_{1447}	u_{1448}	u_{1449}	u_{1450}	u_{1451}	u_{1452}	u_{1453}	u_{1454}	u_{1455}	u_{1456}	u_{1457}	

Bilangan pada suku ke-1457 adalah 1.

Sifat 5.1

Jika (u_n) adalah suatu barisan geometri dengan suku pertama adalah $u_1 = a$ dan rasio = r dengan $r \epsilon R$ dan $|r| < 1$ maka jumlah tak hingga suku-suku barisan tersebut adalah $s = \frac{a}{1-r}$.

Bukti:

Misalkan $un = ar^{n-1}$ dengan $-1 < r < 1, n \epsilon N$

Ingat kembali deret geometri yang telah kamu pelajari sebelumnya, telah diperoleh bahwa

$s_n = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1}$ Pers-1

Dengan mengalikan kedua ruas persamaan 1 dengan r, didapatkan Persamaan 2 berikut.

$rs_n = ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^n$ Pers-2

Sekarang, dari selisih persamaan 1) dengan 2), diperoleh

$s_n - rs^n = (a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n} - 1) - (ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n})$
$s_n (1 - r) = a - ar^n$

$$s_n = \frac{a - ar^n}{1 - r}$$

Rumus jumlah n suku pertama deret geometri adalah

$$s_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, \text{dengan } |r| < 1.$$

Kita ingin menentukan jumlah tak berhingga suku-suku barisan geometri, ini, yaitu, Sn bila $n \to \infty$.

Karena $r \in R$ dan $-1 < r < 1$ dan $n \to \infty$, maka

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{1-r} - \frac{r^n}{1-r} \right) = \frac{a}{1-r}. \text{Mengapa?}$$

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \text{ (terbukti)}$$

- Coba pikirkan bagaimana jumlah suku-suku barisan geometri jika $r \in R$, $r > 1$ dan $r < -1$.
- Bagaimana jika $r = 1$ atau $r = -1$, coba beri contoh barisannya.

Contoh 5.3

Jumlah suatu deret geometri tak hingga adalah $5 + 5\sqrt{5}$ dan rasionya adalah $\frac{1}{5}\sqrt{5}$. Tentukan suku pertama deret tersebut!

Alternatif Penyelesaian

Karena $r = \frac{1}{5}\sqrt{5} < 1$, maka jumlah tak hingga suku barisan

adalah $\frac{a}{1-r}$. sehingga $5 + 5\sqrt{5} = \frac{a}{1 - \frac{1}{5}\sqrt{5}}$.

$\Leftrightarrow a = (5 + 5\sqrt{5})(1 - \sqrt{5})$

$\Leftrightarrow a = 5\sqrt{5} + 5\sqrt{5} - 5$

$\Leftrightarrow a = 4$

Dengan demikian suku pertama barisan tersebut adalah $a = 4\sqrt{5}$

Contoh 5.4

Diberikan barisan bilangan $2, \frac{4}{3}, \frac{8}{9}, \frac{16}{27}, \ldots, \frac{2^n}{3^{n-1}}, \ldots$ dengan $n \in N$

- Tentukan suku ke-9!
- Tentukan jumlah tak hingga barisan tersebut!

Alternatif Penyelesaian

Diketahui $2, \frac{4}{3}, \frac{8}{9}, \frac{16}{27}, \ldots, \frac{2^n}{3^{n-1}}, \ldots$ dengan $n \in N$

$(u_n) = \frac{2^n}{3^{n-1}}$, $n \in N$

Suku ke-9 adalah $u_9 = \frac{2^9}{3^{9-1}} = \frac{512}{6561}$

$u_n =$, $n \in N$

Berati $u_1 = a = 2$ dan $r = \frac{2}{3} < 1$

Jumlah tak hingga suku-suku barisan $2, \frac{4}{3}, \frac{8}{9}, \frac{16}{27}, \ldots, \frac{2^n}{3^{n-1}}, \ldots$ dengan $n \in N$ adalah

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{2}{1-\frac{2}{3}} = \frac{2}{\frac{1}{3}} = 6 \text{ (karena } r = \frac{2}{3} < 1)$$

Jadi $s = 6$

Contoh 5.5

Jumlah deret geometri tak hingga adalah 6, sedangkan jumlah suku-suku genap adalah 2. Tentukan suku pertama deret itu!

Diketahui jumlah deret geometri tak hingga adalah 6, maka $6 = \frac{a}{1-r}$ dan diperoleh nilai $a = 6(1 - r)$.

Deret geometri tak hingga suku-suku genap adalah $ar + ar^3 + ar^5 + ar^7 + \ldots$, maka rasionya adalah $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{ar^{n+2}}{ar^n} = r^2$.

Karena $|r| < 1$ atau $-1 < r < 1$, maka $|r^2| < 1$ atau $-1 < r^2 < 1$ dan jumlah tak hingga suku-suku genapnya adalah

$$2 = \frac{ar}{1-r^2} \Leftrightarrow ar = 2(1 - r^2)$$

$$\Leftrightarrow 6(1 - r)r = 2(1 - r^2)$$

$$\Leftrightarrow 6(1 - r)r = 2(1 - r)(1 + r)$$

$$\Leftrightarrow 6r = 2(1 + r)$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{1}{2}$$

$r = \frac{1}{2}$ disubtitusikan ke persamaan $a = 6(1- r)$. Sehingga diperoleh $a = 3$. Jadi suku pertama deret geometri tak hingga tersebut adalah $a = 3$.

2. Barisan Konstan, Naik, dan Turun

Amatilah suku-suku beberapa barisan berikut

a. $u_n = \frac{1}{2}$, $\forall n \in N$. Suku-suku barisan ini dapat ditulis, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ …

b. $u_n = -1$, $\forall n \in N$. Suku-suku barisan ini dapat ditulis, -1, -1, -1, -1, -1, -1, …

c. $u_n = k$, $\forall n \in N$ dan untuk suatu $k \in R$. Suku-suku barisan ini dapat ditulis, k, k, k, k, …

Berdasarkan data suku-suku setiap barisan yang diberikan di atas, dapat dikatakan bahwa suku barisan pada poin (a), (b), dan (c), nilainya tetap atau sama untuk setiap suku sampai $n \to \infty$. Jika suatu barisan dengan suku-sukunya sama atau tetap untuk setiap n, $n \to \infty$, barisan itu disebut barisan konstan.

Definisi 5.3

Misalkan (u_n) sebuah barisan tak hingga bilangan real.

Barisan (u_n) dikatakan barisan konstan jika dan hanya jika suku sebelumnya selalu sama dengan suku berikutnya.

Ditulis (u_n) adalah barisan konstan $\Leftrightarrow u_n = u_{n+1}, \forall n \in N$.

Amatilah suku-suku dari beberapa barisan berikut

a. $u_n = r_{n-1}, \forall n \in N$ dengan $0 < r < 1$. Suku-suku barisan ini dapat ditulis, 1, r, r^2, r^3, …

b. $u_n =$, $\forall n \in N$. Suku-suku barisan ini dapat ditulis, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

c. $u_n = (\frac{1}{2})^n$, $\forall n \in N$. Suku-suku barisan ini dapat ditulis, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

Berdasarkan data suku-suku setiap barisan yang diberikan di atas, dapat dikatakan bahwa nilai suku barisan pada poin a, b, dan c, semakin besar urutan sukunya makin kecil suku barisannya sampai $n \to \infty$. Jika suatu barisan memiliki suku-sukunya makin kecil untuk suku sampai $n \to \infty$, barisan itu disebut barisan turun.

Definisi 5.4

Misalkan (u_n) sebuah barisan tak hingga bilangan real.

Barisan (u_n) dikatakan barisan turun jika dan hanya jika suku berikutnya kurang dari suku sebelumnya.

Ditulis (u_n) disebut barisan turun $\Leftrightarrow u_n = u_{n+1}, \forall n \in N$.

Amatilah suku-suku dari beberapa barisan berikut.

a. $u_n = (3)^n$, $\forall n \in N$. Suku-suku barisan ini dapat ditulis, 3, 9, 27, 81, …

b. $u_n = \frac{1}{n+1}$, $\forall n \in N$. Suku-suku barisan ini dapat ditulis, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

c. $u_n = n+1$, $\forall n \in N$. Suku-suku barisan ini dapat ditulis, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, …

Berdasarkan data suku-suku setiap barisan yang diberikan di atas, dapat dikatakan bahwa nilai suku barisan pada poin a, b, dan c, semakin besar urutan sukunya makin besar nilai suku barisannya sampai $n \to \infty$. Jika suatu barisan memiliki nilai suku-sukunya makin besar untuk suku sampai $n \to \infty$, barisan itu disebut barisan naik.

Definisi 5.5

Misalkan (u_n) sebuah barisan tak hingga bilangan real.

Barisan (u_n) dikatakan barisan naik jika dan hanya jika suku berikutnya lebih dari suku sebelumnya.

Ditulis (u_n) adalah barisan konstan $\Leftrightarrow u_n = u_{n+1}, \ \forall n \in N$.

Perhatikan beberapa barisan berikut

a. Barisan: 1, 1, 1, 1, 1, … dengan $u_n = 1, \ \forall n \in N$. Barisan ini disebut barisan konstan dengan nilainya tidak lebih dari 1 (satu).

b. Barisan -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, …, dengan $u_n = (-1)^n, \ \forall n \in N$. Nilai mutlak suku-suku barisan tersebut tidak lebih dari 1 (satu).

c. Barisan: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ dengan $u_n = \frac{1}{n}$, $\forall n \in N$. Barisan ini disebut barisan turun dan suku-sukunya tidak lebih dari 1 (satu).

d. Barisan: …, -1, $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{7}$, …, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots$ dengan $u_n = (-1)^n \left(\frac{1}{n}\right)$, $\forall n \in N$

Nilai mutlak suku-suku barisan ini tidak lebih dari 1 (satu) sampai *n* menuju tak hingga. Barisan pada (a) sampai (d) merupakan barisan yang terbatas.

Definisi 5.6

Misalkan (u_n) sebuah barisan tak hingga bilangan real.

Barisan (u_n) dikatakan barisan terbatas jika dan hanya ada bilangan real $M > 0$ yang membawahi selur uh nilai mutlak suku barisan tersebut.

Ditulis (u_n) dikatakan barisan terbatas $\Leftrightarrow (\exists M \in R) M > 0$ sehingga $u_n = |u_n|'' M$, $\forall n \in N$.

Barisan pada *a* sampai *d* merupakan barisan yang terbatas.

Berdasarkan Definisi 5.6 di atas dapat diturunkan beberapa sifat berikut

Sifat 5.2

Jika (u_n) adalah suatu barisan geometri dengan suku pertama adalah $u_1 = a$, $a \neq 0$ dan rasio = r dengan $r \in R$ dan $r < -1$ atau maka barisan tersebut tidak terbatas.

Contoh 5.6

Diberikan barisan $u_n = 2^n$, $n \in N$. Selidiki apakah barisan tersebut terbatas.

Alternatif Penyelesaian

Suku-suku barisan $u_n = (n)$, $n \in N$ adalah 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, … Amatilah suku-suku barisan tersebut! Semakin besar urutan suku barisan tersebut, semakin besar sukunya dan naik menuju tak hingga.

Rasio barisan adalah $r = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2^{n+1}}{2^n} = 2 > 1$

Barisan $u_n = (2^n)$, $n \in N$ adalah barisan tak terbatas sebab berapapun kita pilih $M \in R$, $M > 0$, maka ada suku barisan un yang lebih dari M. Dengan demikian ada $n \in N$, sehingga $u_n > M$. Mengapa?

Contoh 5.7

Diberikan barisan $u_n = (-1)^n$, $n \in N$. Bentuklah beberapa barisan tak hingga yang baru dari suku-suku barisan tersebut dan tentukan rumus fungsi dari barisan yang telah dibentuk.

Alternatif Penyelesaian

Suku-suku barisan $u_n = (-1)^n$, $n \in N$ adalah -1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, …

Kita dapat membentuk barisan tak hingga dari suku-suku barisan tersebut, dengan cara mengambil suku-suku ganjil dan suku-suku genap untuk membentuk dua kelompok barisan yang baru, yaitu:

a. Barisan -1, -1, -1, -1, -1, -1, … dengan rumus fungsinya $u(n) = -1, \forall n \in N$.

b. Barisan 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, … dengan rumus fungsinya $u(n) = 1, \forall n \in N$.

Kedua barisan yang baru dibentuk adalah barisan konstan, sebab sukunya sama untuk setiap $n \in N$. Selanjutnya kedua barisan tersebut adalah barisan terbatas, sebab ada bilangan real $M = 2$ yang membawahi semua nilai suku-suku barisan tersebut atau $\left|-1^n\right| < 2, \forall n \in N$. Apakah nilai $M = 1$ membawahi semua nilai suku barisan $u_n = (-1)^n$, $n \in N$? Dapatkah kamu membentuk barisan yang lain dari suku-suku barisan $u_n = (-1)^n$, $n \in N$ selain dari barisan bagian (a) dan (b)? Buatlah minimal 3 (tiga) barisan tak hingga yang baru dari suku-suku barisan pada Contoh 5.6 di atas dan tentukan rumus fungsi barisan tersebut.

Uji Kompetensi 5.1

1. Dari setiap barisan berikut, tentukan selisih suku ke-25 dan suku ke-23

   a. $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n} n \in N$

   b. $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}, n \in N$

   c. $u_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n, n \in N$

   d. $u_n = \left(\frac{-n}{n+1}\right), n \in N$

2. Dari setiap barisan berikut, tentukan selisih suku ke-25 dan suku ke-23.

   a. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

   b. $u_n = (-1)^n, n \in N$

c. $10^{-5},\ 2^{3},\ 25^{3},\ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ...$

d. $u_n = \frac{n!}{2^n}, n \in N$

3. Tunjukkanlah bahwa barisan di bawah ini adalah barisan naik atau turun atau konstan.

   a. $u_n = \left(\frac{1}{n}\right), n \in N$

   b. $u_n = (1)^n, n \in N$

   c. $u_n = 2^n, n \in N$

   d. $u_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n, n \in N$

4. Tiga bilangan membentuk barisan aritmatika. Jika suku ketiga ditambah 2, maka terbentuk barisan geometri dengan rasi (r) = 2. Tentukan suku-suku barisan tersebut!

5. Tiga bilangan membentuk barisan geometri. Jumlah tiga bilangan itu 292 dan hasil kali bilangan itu 32.768. Tentukan barisan geometri tersebut!

6. Pola PQQRRRSSSSPQQRRRSSSSPQQRRRSSSS... berulang sampai tak hingga. Huruf apakah yang menempati urutan $2^6\ 3^4$?

7. Diketahui barisan yang dibentuk oleh semua bilangan ganjil 1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 … Angka berapakah yang terletak pada bilangan ke 2015 ? (suku ke-12 adalah angka 1 dan bilangan ke-15 adalah angka 9)

8. Tentukan jumlah setiap deret berikut!

   a. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$

   b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

   c. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$

   d. $\sum_{n=0}^{\infty} 3\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

8. Tentukanlah jumlah semua bilangan asli di antara 1 sampai 200 yang habis dibagi 5!

10. Sebuah bola tenis dijatuhkan ke lantai dari ketinggian 1 meter. Setiap kali setelah bola itu memantul, ia mencapai ketingggian $\frac{2}{3}$ dari tinggi sebelum pemantulan. Tentukan panjang lintasan bola!

11. Beni berhasil lulus ujian saringan masuk PT (Perguruan Tinggi). Sebagai mahasiswa, mulai bulan 1 Agustus 2013, ia menerima uang saku sebesar Rp15.000.000,00 untuk satu triwulan. Uang saku ini diberikan setiap permulaan triwulan. Untuk setiap triwulan berikutnya uang saku yang diterimanya dinaikkan sebesar Rp.2.500.000,00. Berapa besar uang saku yang akan diterima Beni pada awal tahun 2018?

12. Banyaknya penduduk kota Medan pada tahun 2012, sebanyak 16 juta orang. Setiap 15 tahun penduduk kota Medan bertambah menjadi dua kali lipat dari jumlah semula. Berapakah banyaknya penduduk kota Medan pada tahun 1945?

13. Seutas tali dibagi menjadi 5 bagian dengan panjang membentuk suatu barisan geometri. Jika tali yang paling pendek adalah 16 cm dan tali yang paling panjang 81 cm, maka panjang tali semula adalah ….

14. Sebuah bola pimpong dijatuhkan dari ketinggian 25 m dan memantul kembali dengan ketinggian 4/5 kali tinggi sebelumnya. Pemantulan ini berlangsung terus menerus hingga bola berhenti. Jumlah seluruh lintasan bola adalah….

15. Jumlah semua suku deret geometri tak hingga adalah 2, sedangkan jumlah suku-suku yang bernomor ganjil (kecuali suku pertama) dan genap adalah 1. Tentukan deret tersebut!

16. Pertumbuhan penduduk biasanya dinyatakan dalam persen. Misalnya, pertumbuhan penduduk adalah 1,5% per tahun artinya jumlah penduduk bertambah sebesar 1,5% dari jumlah penduduk tahun sebelumnya. Pertambahan penduduk menjadi dua kali setiap 30 tahun. Jumlah penduduk desa pada awalnya 100 orang, berapakah jumlah penduduknya setelah 100 tahun apabila pertumbuhannya 2%?

17. Jumlah deret geometri tak hingga adalah $7+7\sqrt{7}$ dan rasionya adalah $\frac{1}{49}\sqrt{7}$. Tentukan suku pertama deret tersebut!

18. Jumlah suku-suku ganjil dari suatu deret tak hingga adalah 18. Jumlah tak hingga suku-suku deret tersebut 24. Tentukan suku pertama dan rasio deret tersebut!

19. Jumlah deret geometri tak hingga $\frac{1}{2}p-\frac{2}{5}p^2+\frac{8}{25}p^3-\ldots$ adalah $\frac{1}{3}$. Tentukan nilai p!

Projek

Himpunlah minimal tiga buah masalah penerapan barisan dan deret tak hingga dalam bidang fisika, teknologi informasi, dan masalah nyata disekitarmu. Ujilah berbagai konsep dan aturan barisan dan deret tak hingga di dalam pemecahan masalah tersebut. Buatlah laporan hasil kerjamu dan sajikan di depan kelas.

D. PENUTUP

Kita telah menemukan konsep barisan dan deret tak hingga dari pemecahan masalah nyata beserta sifat-sifatnya. Beberapa hal penting sebagai simpulan dari hasil pembahasan materi barisan dan deret tak hingga disajikan sebagai berikut :

1. Barisan tak hingga objek di himpunan S adalah suatu fungsi u dengan daerah asal (*domain*) himpunan bilangan asli dan daerah hasilnya (*range*) suatu himpunan $R_u \subseteq S$. Ditulis (u_n), $n \in N$.
2. Misalkan (u_n) sebuah barisan tak hingga bilangan real dan $s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$ adalah jumlah parsial suku-suku barisan tak berhingga.
   - Deret tak hingga adalah barisan jumlah parsial n suku barisan tak hingga. Ditulis (sn), $n \in N$ atau $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$
   - Jumlah deret tak hingga adalah jumlah suku-suku barisan tak hingga. Ditulis $\sum_{n=1}^{n=\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$
3. Barisan bilangan dikatakan barisan naik, jika dan hanya jika $u_n < u_{n+1}, \forall n \in N$.
4. Barisan bilangan dikatakan barisan turun, jika dan hanya jika $u_n > u_{n+1}, \forall n \in N$.
5. Sebuah barisan bilangan yang suku-sukunya naik atau turun tak terbatas, barisan ini disebut barisan divergen.
6. Sebuah barisan bilangan yang semua sukunya sama disebut barisan konstan.

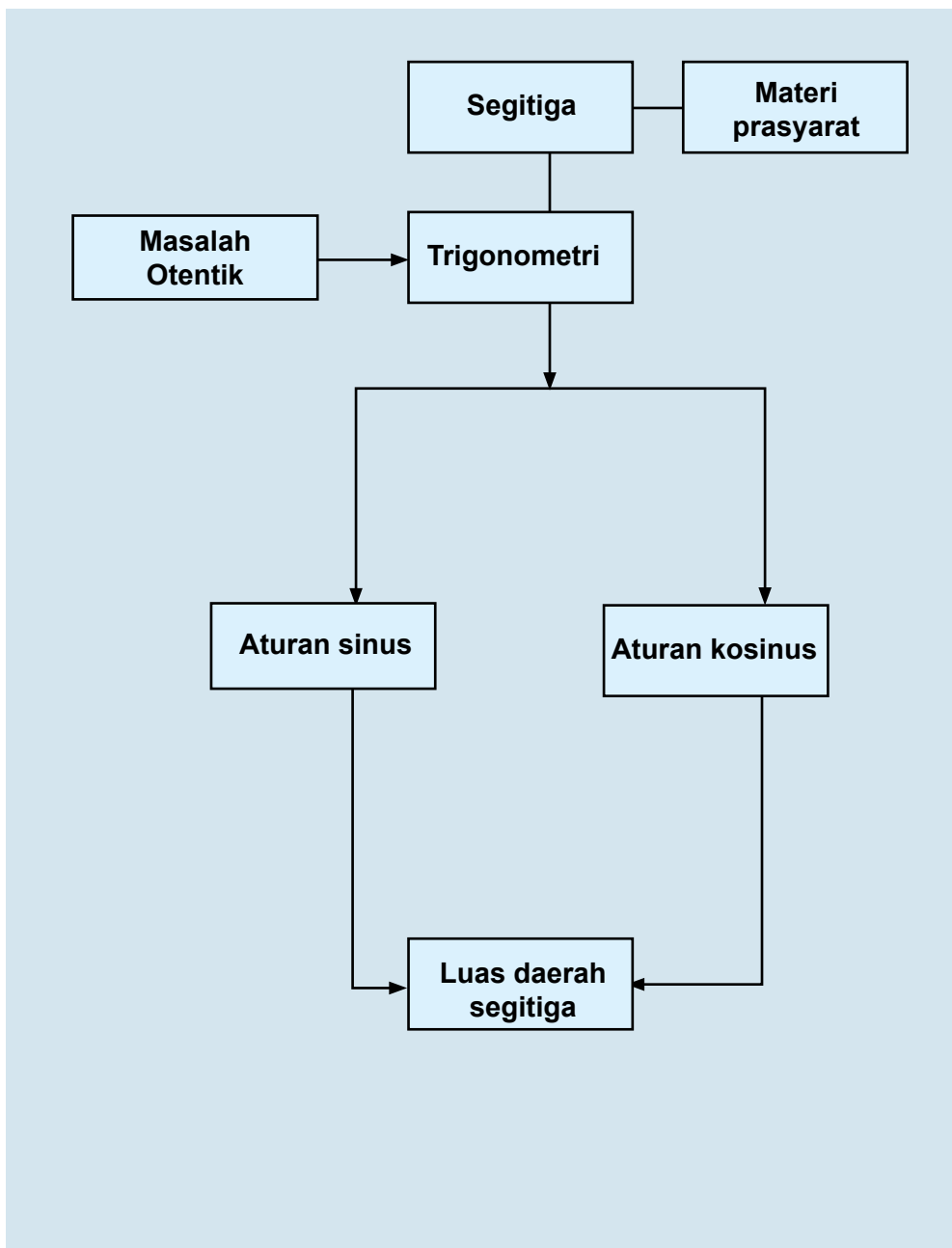
TRIGONOMETRI

A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
1. Menghayati pola hidup disiplin, kritis, bertanggungjawab, konsisten dan jujur serta menerapkannya dalam kehidupan sehari–hari. 2. Mendeskripsikan dan menganalisis aturan sinus dan kosinus serta menerapkannya dalam menentukan luas daerah segitiga. 3. Merancang dan mengajukan masalah nyata terkait luas segitiga dan menerapkan aturan sinus dan kosinus untuk menyelesaikannya	Melalui pembelajaran materi trigonometri, siswa memperoleh pengalaman belajar: • Menemukan konsep perbandingan trigonometri melalui pemecahan masalah otentik. • Berkolaborasi memecahkan masalah aktual dengan pola interaksi sosial kultur. • Berpikir tingkat tinggi (berpikir kritis dan kreatif) dalam menyelidiki dan mengaplikasikan konsep trigonometri dalam memecahkan masalah otentik

Istilah Penting

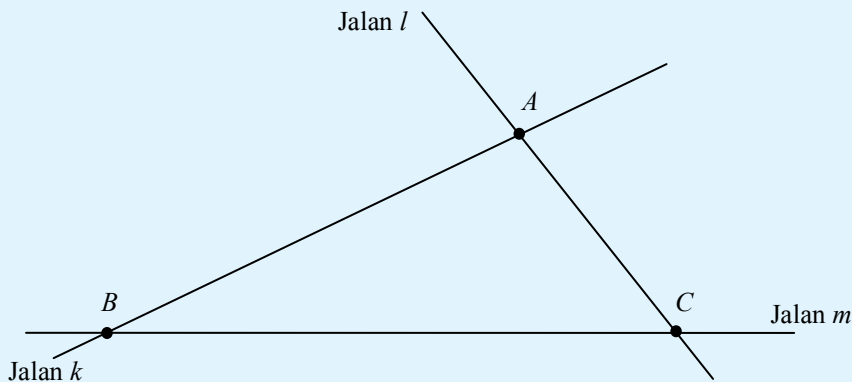
- *Aturan sinus*
- *Aturan kosinus*
- *Luas segitiga*

B. PETA KONSEP

C. MATERI PEMBELAJARAN

1. Aturan Sinus

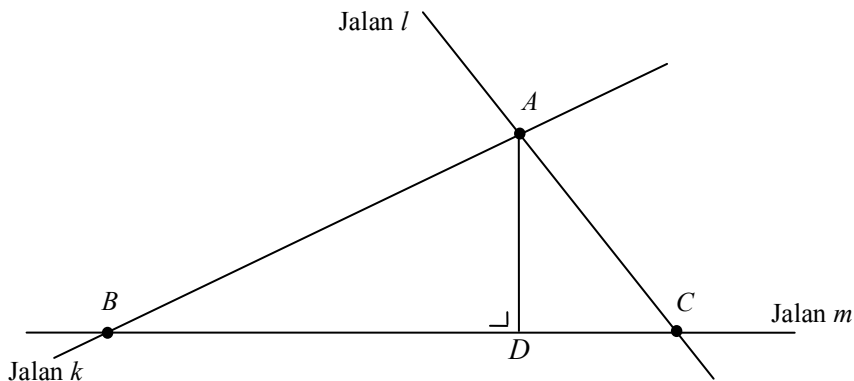
Pada pelajaran trigonometri di kelas X, kamu telah belajar konsep trigonometri untuk segitiga siku-siku. Pada bahasan ini kita akan menemukan rumus-rumus trigonometri yang berlaku pada sebarang segitiga. Permasalahan pada segitiga adalah menentukan panjang sisi dan besar sudut segitiga. Jika hanya sebuah panjang sisi segitiga diketahui, apakah kamu dapat menentukan panjang sisi-sisi yang lain? Atau kamu dapat menentukan besar sudutnya? Sebaliknya, jika hanya sebuah sudut segitiga yang diketahui, apakah kamu dapat menentukan besar sudut-sudut yang lain dan panjang sisi-sisinya? Pertanyaan selanjutnya adalah apa saja yang harus diketahui agar kamu mampu menyelesaikan masalah segitiga tersebut? Agar kamu dapat memahaminya, pelajarilah masalah-masalah berikut.

Masalah-6.1

Jalan *k* dan jalan *l* berpotongan di kota *A*. Dinas tata ruang kota ingin menghubungkan kota *B* dengan kota *C* dengan membangun jalan *m* dan memotong kedua jalan yang ada, seperti yang ditunjukkan Gambar 6.1 di bawah. Jika jarak antara kota *A* dan kota *C* adalah 5 km, sudut yang dibentuk jalan m dengan jalan *l* adalah 75° dan sudut yang dibentuk jalan *k* dan jalan *m* adalah 30°. Tentukanlah jarak kota *A* dengan kota *B*!

Gambar 6.1. Jalan k, l, dan m.

Alternatif Penyelesaian ke-1

(dengan memanfaatkan garis tinggi pada segitiga)

Untuk memudahkah perhitungan, kita bentuk garis tinggi AD, dimana garis AD tegak lurus dengan garis BC, seperti Gambar 6.2 berikut.

Gambar 6.2. Segitiga *ABC* dengan garis tinggi AD

Ingat kembali konsep sinus pada segitiga siku-siku.

Perhatikan ΔABD!

Dalam ΔABD, diperoleh bahwa: $\sin B = \dfrac{AD}{AB}$ atau $AD = AB.\ \sin B$…............(1)

Dalam ΔADC, diperoleh bahwa: $\sin C = \dfrac{AD}{AC}$ atau $AD = AC.\ \sin C$…...........(2)

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh bahwa: $AB.\ \sin B = AC.\ \sin C$………(3)

Diketahui bahwa $\angle C = 75^0$; $\angle B = 30^0$; dan jarak $AC = 5$.

Dengan mensubstitusikan nilai-nilai ini ke persamaan (3) maka diperoleh

$AB.\ \sin B \quad = AC.\ \sin C$

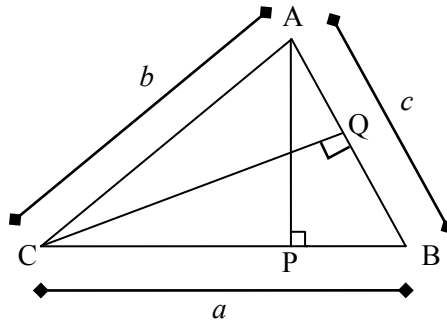
$AB \times \sin 30^0 \quad = 5 \times \sin 75^0$ (gunakan tabel sinus atau kalkulator, sinus $75^0 = 0,965$)

$AB \quad = \dfrac{5 \times 0,965}{\frac{1}{2}}$

$= 10 \times 0,965$

$= 9,65$

Jadi, jarak kota A dengan kota B adalah 9, 65 km.

Perhatikan Gambar 6.3 berikut.

Gambar 6.3 Segitiga ABC

Dari Gambar 6.3 di samping, diketahui bahwa ΔABC dengan panjang sisi-sisinya adalah a, b, dan c. Garis AP merupakan garis tinggi, dimana $BC \perp AP$ dan garis CQ merupakan garis tinggi, dimana $CQ \perp AB$.

Dari ΔABP diperoleh, $\sin B = \dfrac{AP}{c}$ atau $AP = c \sin B$ ....(1)

Dari ΔACP diperoleh, $\sin C = \dfrac{AP}{b}$ atau $AP = b \sin C$ ....(2)

Dari Persamaan (1) dan (2) diperoleh, $c \sin B = b \sin C$

(kalikan kedua ruas dengan $\dfrac{1}{\sin B \sin C}$)

$$\frac{c \sin B}{\sin B \sin C} = \frac{b \sin C}{\sin B \sin C}$$

Maka diperoleh, $\dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{b}{\sin B}$ ....(3)

Dari ΔACQ diperoleh, $\sin A = \dfrac{CQ}{b}$ atau $CQ = b \sin A$ ....(4)

Dari ΔBCQ diperoleh, $\sin B = \dfrac{CQ}{a}$ atau $CQ = a \sin B$ ....(5)

Dari Persamaan (4) dan (5) diperoleh, $b \sin A = a \sin B$

(kalikan kedua ruas dengan $\dfrac{1}{\sin B \sin C}$)

$$\frac{b \sin A}{\sin A \sin B} = \frac{a \sin B}{\sin A \sin B}$$

Maka diperoleh, $\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$ .... (6)

Berdasarkan persamaan (3) dan (6), maka diperoleh

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Alternatif Penyelesaian ke-2

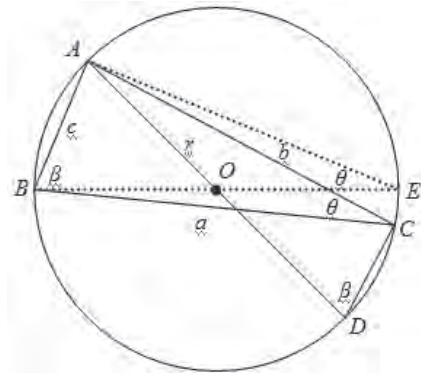
Perhatikan kembali Gambar 6.4 berikut.

ΔABC lancip dan AD dan BE merupakan diameter lingkaran O dengan jari-jari r.

Panjang garis $AB = c$; $AC = b$; $BC = a$; $AD = BE = 2r$.

$\angle ABC = \angle ADC = \beta$;

$\angle ACB = \angle AEB = ø$

dan $\angle ACD$ adalah sudut siku-siku = 90^0.

Gambar 6.4. ΔABC pada lingkaran O

Dari ΔACD diperoleh

$\sin\beta = \frac{AC}{AD} = \frac{b}{2r}$ sehingga $2r = \frac{b}{\sin\beta}$ ....(1)

Dari ΔBAE diperoleh

$\sin\theta = \frac{AB}{BE} = \frac{c}{2r}$ sehingga $2r = \frac{c}{\sin\theta}$ ....(2)

Dari persamaan (1) dan persamaan (2) di peroleh $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\theta}$

Latihan

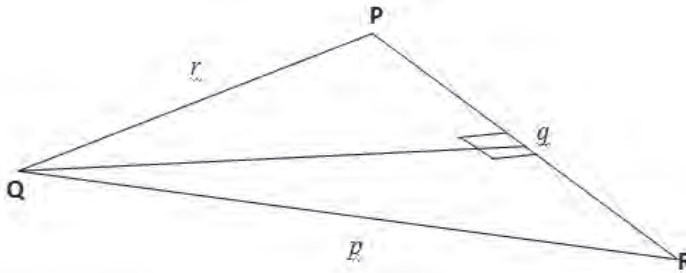
Dengan menggunakan $\angle BAC = \alpha$, buktikanlah bahwa $2r = \frac{a}{\sin\alpha}$.

Dari uraian di atas, maka disimpulkan aturan sinus pada segitiga seperti berikut.

Aturan Sinus
Untuk sembarang segitiga *ABC*, dengan panjang sisi-sisi *a*, *b*, *c* dan $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, berlaku $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

Latihan 6.1.

Untuk segitiga tumpul *PQR* di samping, buktikanlah bahwa

$\dfrac{p}{\sin P} = \dfrac{q}{\sin Q} = \dfrac{r}{\sin R}$ berlaku.

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan gambar di atas diperoleh

$\sin P = \dfrac{QX}{r}$ ....(1)

$\sin R = \dfrac{QX}{P}$ ....(2)

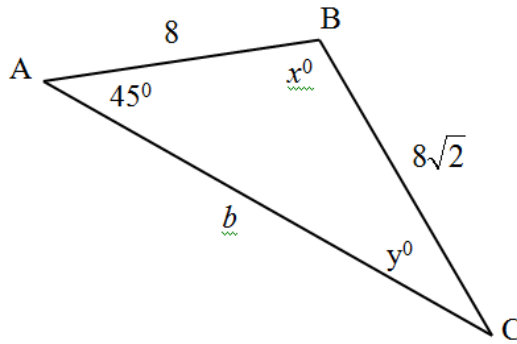
berdasarkan (1) dan (2) diperoleh

$QX = r \sin P$ dan $QX = p \sin R$

karena $QX = QX$ maka

$r \sin P = p \sin R$ sehingga $\dfrac{r}{\sin R} = \dfrac{p}{\sin P}$ (terbukti)

Contoh 6.1

Perhatikan segitiga ABC berikut. Panjang $AB = 8$, $BC = 8\sqrt{2}$, $AC = b$, sudut $BAC = 45^o$, sudut $ACB = y^o$ dan sudut $ABC = x^o$. Dengan memanfaatkan tabel sinus pada sudut x^o maka tentukan panjang b.

Gambar 6.5 Segitiga ABC

Alternatif Penyelesaian

Dengan menggunakan aturan sinus maka diperoleh:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin y^o} \Leftrightarrow \frac{8\sqrt{2}}{\sin 45^o} = \frac{8}{\sin y^o}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{8}{\sin y^o}$$

$$\Leftrightarrow 16 = \frac{8}{\sin y^o}$$

$$\Leftrightarrow \sin y^o = \frac{1}{2} \text{atau } y^o = 30^o$$

Dengan mengingat konsep sudut pada segitiga yaitu $\angle A + \angle B + \angle C = 180^o$ sehingga $45^o + 30^o + x^o = 180^o$ atau $x^o = 105^o$. Dengan menggunakan aturan sinus kembali maka diperoleh:

$$\frac{AC}{\sin x^o}=\frac{AB}{\sin y^o}\Leftrightarrow\frac{b}{\sin 105^o}=\frac{8}{\sin 30^o}$$

$$\Leftrightarrow\frac{b}{\sin 105^o}=\frac{8}{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{b}{\sin 105^o}=16$$

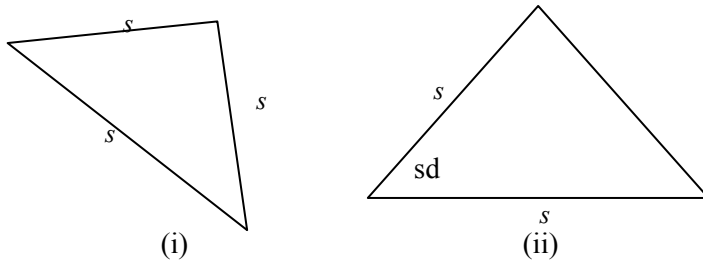
$$\Leftrightarrow b=16.\sin 105^o$$

Dengan memanfaatkan tabel sinus atau kalkulator maka diperoleh:

$b = 16.\sin 105^o = 16 \times 0,9659 = 15,4548$.

Jadi, panjang sisi AC adalah 15,4548 satuan panjang.

2. Aturan Cosinus

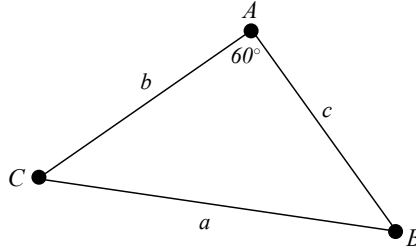
Perhatikan Gambar 6.6 di bawah! Pada segitiga (i), diketahui panjang ketiga sisinya, sedangkan pada segitiga (ii), diketahui sebuah sudut dan dua buah sisi yang mengapitnya. Bagaimana cara Anda mengetahui ukuran sudut dan sisi lainnya dari kedua segitiga tersebut?

Gambar 6.6. Segitiga jika diketahui (s, s, s) dan (s, sd, s)

Untuk menemukan konsep aturan kosinus dalam segitiga, pelajarilah Masalah 6.2 berikut.

Masalah-6.2

Dua kapal tanker berangkat dari titik yang sama dengan arah berbeda sehingga membentuk sudut 60°. Jika kapal pertama bergerak dengan kecepatan 30 km/jam, dan kapal kedua bergerak dengan kecepatan 25 km/jam. Tentukanlah jarak kedua kapal setelah berlayar selama 2 jam perjalanan.

Alternatif Penyelesaian

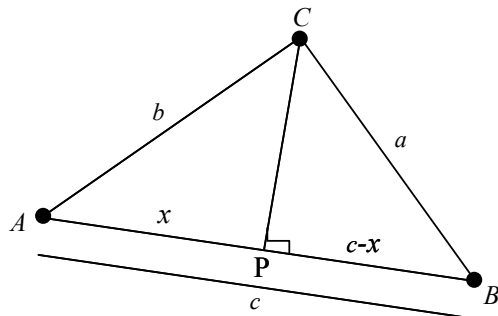
Untuk memudahkan penyelesaian masalah di atas, kita asumsikan bahwa pergerakan kapal membentuk segitiga seperti gambar di bawah.

Gambar 6.7 Segitiga *ABC* dengan sudut *A* = 60°

Dari gambar di atas, dapat kita misalkan beberapa hal sebagai berikut.

- Titik A merupakan titik keberangkatan kedua kapal tersebut.
- Besar sudut A merupakan sudut yang dibentuk lintasan kapal yang berbeda yaitu sebesar 60^0.
- AB merupakan jarak yang ditempuh kapal pertama selama 2 jam dengan kecepatan 30 km/jam, sehingga AB = 60 km.
- AC merupakan jarak yang ditempuh kapal kedua selama 2 jam perjalanan dengan kecepatan 25 km/jam, sehingga AC = 50 km.
- BC merupakan jarak kedua kapal setelah menempuh perjalanan selama 2 jam karena itu, pertanyaan yang harus dijawab adalah berapakah BC.

Agar kita dapat menentukan jarak BC, maka kita perlukan gambar berikut. Garis CP merupakan garis tinggi segitiga ABC, dimana $CP \perp AB$. Misalkan panjang AP adalah x maka panjang BP adalah $(c - x)$.

Perhatikan ΔACP!

Dari ΔACP berlaku: $AC^2 = AP^2 + CP^2$ atau $CP^2 = AC^2 - AP^2$.

Gambar 6.8 Segitiga *ABC* dengan garis tinggi *CP*

Dengan mensubstitusi nilai-nilai yang sudah kita peroleh, maka $CP^2 = b^2 - x^2$ ....(1)

Dari ΔBPC berlaku: $BC^2 = BP^2 + CP^2$ atau $CP^2 = BC^2 - BP^2$.

Dengan mensubstitusi nilai-nilai yang sudah kita peroleh,

$CP^2 = a^2 - (c - x)^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2$ ....(2)

Berdasarkan persamaan (1) dan (2) diperoleh:

$b^2 - x^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2$

$b^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2 + x^2$

$b^2 = a^2 - c^2 + 2cx$

atau

$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$...(3)

Berdasarkan ΔAPC, diperoleh

$\cos A = \frac{x}{b}$, maka $x = b \cos A$...(4)

dengan mensubstitusi persamaan. (4) ke dalam persamaan (3), maka diperoleh:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$..(5)

Dengan mensubstitusi nilai-nilai yang telah diketahui ke dalam persamaan (5) maka diperoleh

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ &= 50^2 + 60^2 - (2 \times 50 \times 60 \times \cos 60^0) \\ &= 2500 + 3600 - (600 \times \tfrac{1}{2}) \\ &= 4100 - 300 \\ &= 3800 \end{aligned}$$

Maka jarak antara kedua kapal tanker tersebut setelah perjalanan selama 2 jam adalah 3800 km.

Berdasarkan Alternatif Penyelesaian pada Masalah 6.2 di atas, ditemukan aturan kosinus pada sebarang segitiga sebagai berikut.

Aturan Cosinus

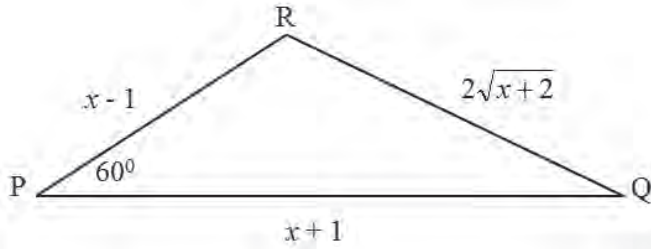
Untuk sembarang segitiga *ABC,* dengan panjang sisi-sisi *a, b, c* dan $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, berlaku

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

Contoh 6.2

Perhatikan gambar berikut. Tentukan panjang sisi-sisi segitiga tersebut.

Gambar 6.9 Segitiga *PQR* dengan sudut *P* = 60°

Alternatif Penyelesaian

Dengan menggunakan aturan cosinus maka diperoleh:

$RQ^2 = PR^2 + PQ^2 – 2.PR.PQ.\cos 60^o$

$(2\sqrt{x+2})^2 = (x + 1)^2 + (x – 1)^2 – 2.(x + 1).(x – 1).\cos 60^o$

$4(x + 2) = (x + 1)^2 + (x – 1)^2 – (x + 1).(x - 1)$

$4x + 8 = x^2 + 2x + 1 + x^2 – 2x + 1 – x^2 + 1$

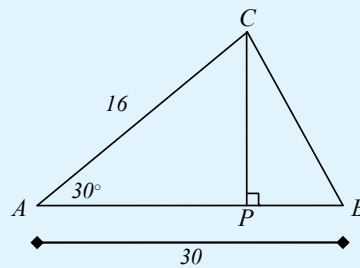
$x^2 – 4x – 5 = 0$ (ingat konsep persamaan kuadrat)

$(x – 5)(x + 1) = 0$

sehingga nilai x yang ditemukan adalah $x = 5$ dan $x = -1$. Nilai x yang memenuhi adalah $x = 5$ sehingga panjang sisi-sisi segitiga tersebut adalah 4, 6 dan $2\sqrt{7}$.

3. Luas Segitiga

Masalah-6.3

Sebidang tanah berbentuk segitiga *ABC* seperti pada gambar di samping. Panjang sisi *AB* adalah 30 m, panjang sisi *BC* adalah 16 m dan besar sudut *BAC* adalah 300. Jika tanah itu dijual dengan harga Rp250.000,00 untuk setiap meter persegi. Tentukan harga penjualan tanah tersebut.

Gambar 6.10. Segitiga ABC

Alternatif Penyelesaian

Garis CP merupakan garis tinggi segitiga ABC sehingga $\overline{CP}$ tegak lurus $\overline{AB}$.

Luas $\Delta ABC = \frac{1}{2} \times AB \times CP$...(1)

Dari segitiga ACP diketahui

$\sin A = \frac{CP}{AC}$, sehingga $CP = AC \times \sin A$.................................(2)

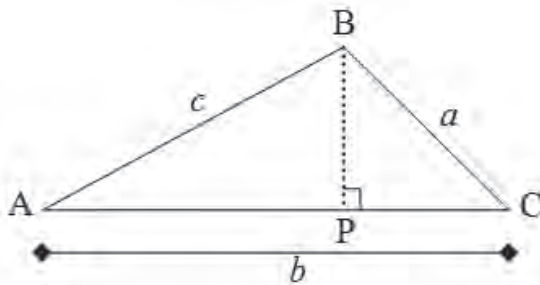
Dengan mensubstitusikan pers (2) ke pers. (1) diperoleh

$$\begin{aligned} \text{Luas } \Delta ABC &= \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin A \\ &= \frac{1}{2} \times 30 \times 16 \times \sin 30^0 \\ &= 120 \end{aligned}$$

Maka luas tanah tersebut adalah 120 m^2.

Jika harga 1 m^2 tanah adalah Rp250.000,00, maka harga jual tanah tersebut ditentukan dengan $120 \times 250.000 = 30.000.000$.

Maka harga jual tanah tersebut adalah Rp30.000.000,00

Perhatikan Gambar 6.11 berikut.

Gambar 6.11 Segitiga ABC

Garis BP merupakan garis tinggi ΔABC sehingga $\overline{AC}$ tegak lurus $\overline{BP}$. Panjang sisi AB, AC, dan BC berturut-turut adalah c, b, dan a.

Ingat kembali rumus menentukan luas daerah segitiga.

Luas $\Delta ABC = \frac{1}{2} \times AC \times BP$...(1)

Dari segitiga ABP diketahui

$\sin A = \dfrac{BP}{AB}$, sehingga $BP = AB \times \sin A$..................................(2)

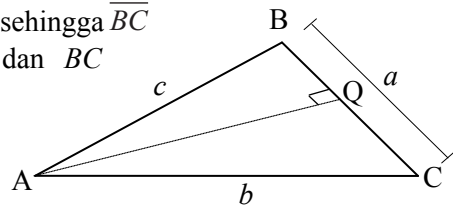
Dengan mensubstitusikan persamaan (2) ke persamaan (1) diperoleh

$$\text{Luas } \Delta ABC = \frac{1}{2} \times AC \times BP$$

$$\text{Luas } \Delta ABC = \frac{1}{2} \times AC \times AB \times \sin A$$

$$\text{Luas } \Delta ABC = \frac{1}{2} \times b \times c \times \sin A$$

Perhatikan Gambar 6.12 berikut.

Garis AQ merupakan garis tinggi ΔABC sehingga $\overline{BC}$ tegak lurus $\overline{AQ}$. Panjang sisi AB, AC, dan BC berturut-turut adalah c, b, dan a.

Gambar 6.12 Segitiga ABC

Luas $\Delta ABC = \dfrac{1}{2} \times BC \times AQ$ ....(1)

Dari segitiga ABQ diketahui

$\sin B = \dfrac{AQ}{AB}$, sehingga $AQ = AB \times \sin B$ ....(2)

Dengan mensubstitusikan pers (2) ke pers. (1) diperoleh

$$\text{Luas } \Delta ABC = \frac{1}{2} \times BC \times AQ$$

$$\text{Luas } \Delta ABC = \frac{1}{2} \times BC \times AB \times \sin B$$

$$\text{Luas } \Delta ABC = \frac{1}{2} \times a \times c \times \sin B$$

Latihan 6.2

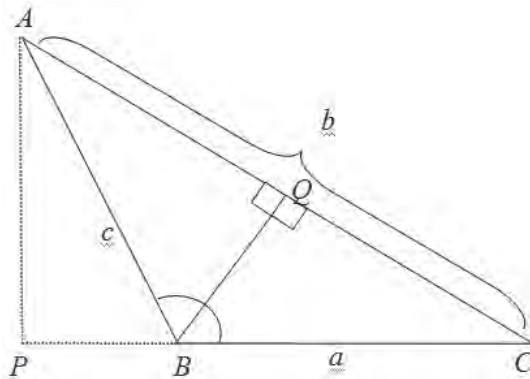
Dengan menggunakan ΔBPC pada Gambar 6.11 dan ΔAQC pada Gambar 6.12, tentukanlah rumus Luas ΔABC.

Berdasarkan penyelesaian uraian-uraian di atas, ditemukan rumus luas sebarang segitiga sebagai berikut.

Definisi 6.1

Untuk sembarang segitiga ABC, dengan panjang sisi-sisi a, b, c dan $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, berlaku Luas $\Delta ABC = \frac{1}{2} \times ab \sin C = \frac{1}{2} \times bc \sin A = \frac{1}{2} \times ac \sin B$.

Latihan 6.3

Dengan menggunakan segitiga ABC tumpul seperti Gambar 6.13 dibawah, buktikan bahwa Luas $\Delta ABC = \frac{1}{2} \times bc \sin A$.

Gambar 6.13. Segitiga tumpul *ABC*

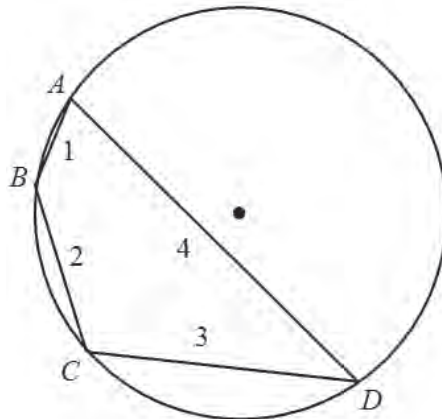
Berdasarkan Gambar 6.13 diperoleh

ΔBQA siku-siku di Q, sehingga

$BQ = c \sin A$ dan diperoleh juga $BQ = a \sin C$

karena Luas $\Delta ABC = \frac{1}{2} \times BQ \times b = \frac{1}{2} b \sin C$

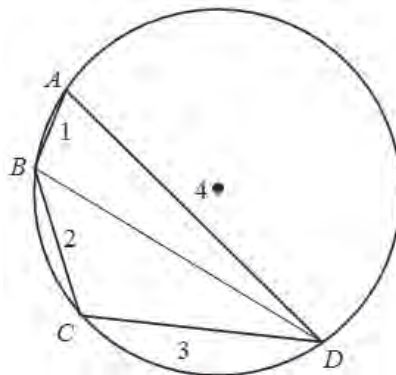
Contoh 6.3

Perhatikan gambar berikut. Titik A, B, C, dan D ada pada lingkaran L dengan panjang $AB = 1$, $BC = 2$, $CD = 3$ dan $AD = 4$.

Gambar 6.14 Segiempat *ABCD* pada lingkaran *L*

Tentukan luas segiempat *ABCD* dengan panjang $AB = 1$, $BC = 2$, $CD = 3$ dan $AD = 4$.

Alternatif Penyelesaian

Langkah 1.

Bagi daerah ABCD menjadi dua bagian dengan menarik garis AC atau BD. Misalkan, kita pilih garis BD sehingga gambar menjadi:

Gambar 6.15 Daerah segiempat ABCD terbagi atas dua segitiga

Langkah 2.

Manfaatkan aturan cosinus pada masing-masing daerah.

Perhatikan segitiga BAD

Dengan menggunakan aturan cosinus maka diperoleh:

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD.\cos A$

$BD^2 = 1^2 + 4^2 - 2.1.4.\cos A$

$BD^2 = 17 - 8.\cos A$

Perhatikan segitiga BCD

Dengan menggunakan aturan cosinus maka diperoleh:

$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC.CD.\cos C$

$BD^2 = 2^2 + 3^2 - 2.2.3.\cos C$

$BD^2 = 13 - 12.\cos C$

Berdasarkan konsep sudut pada lingkaran maka $\angle A + \angle C = 180^\circ$ sehingga $\angle C = 1800 - \angle A$ sehingga diperoleh:

$17 - 8.\cos A = 13 - 12.\cos C$

$17 - - 8.\cos A = 13 - 12.\cos (180^\circ - A)$ (ingat konsep trigonometri di kelas X)

$17 - 8.\cos A = 13 + 12.\cos A$

$20.\cos A = 4$

$\cos A = \frac{1}{5}$

Langkah 3.

Berdasarkan konsep trigonometri pada kelas X maka diperoleh segitiga siku-siku dengan $\cos A = \frac{1}{5}$. Perhatikan Gambar!

Dengan Phytagoras maka diperoleh panjang sisi $\sqrt{25-1} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

Gambar 6.16 Nilai $\cos A = \frac{1}{5}$ pada segitiga siku-siku

Dengan konsep trigonometri dasar maka diperoleh:

$\sin A = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

Langkah 4.

Jadi, luas □ABCD = luas □BAD + luas □BCD

luas □ABCD = $\frac{1}{2}$.AB.AD.sin A + $\frac{1}{2}$.CB.CD.sin C

luas □ABCD = $\frac{1}{2}$.1.4.sin A + $\frac{1}{2}$.2.3.sin (180° – A)

luas □ABCD = 2.sin A + 3.sin A

luas □ABCD = 5.sin A

luas □ABCD = $5 \times \frac{2\sqrt{6}}{5}$

luas □ABCD = $2\sqrt{6}$

Jadi, luas segiempat ABCD pada lingkaran tersebut adalah $2\sqrt{6}$ satuan luas.

Contoh 6.4

Pada segitiga ABC dengan luas L. Panjang $AB = p$, $AC = q$. Jika D pada BC sehingga AD membagi sudut BAC menjadi dua bagian yang sama yaitu x^{o} maka tentukan panjang AD.

Alternatif Penyelesaian

Soal ini diserahkan kepada siswa. Kamu kerjakan soal tersebut dengan petunjuk pada langkah-langkah berikut.

Langkah 1. Gambarkan segitiga yang dimaksud

Langkah 2. Perhatikan bahwa segitiga terbagi menjadi dua bagian. Tentukan luas masing-masing bagian. Hasil jumlah kedua bagian segitiga sama dengan luas segitiga ABC.

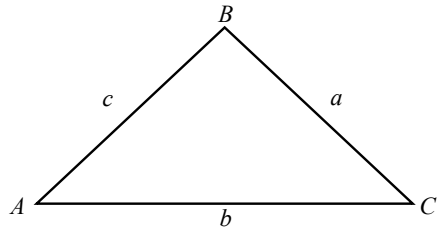
Langkah 3. Panjang AD telah ditemukan.

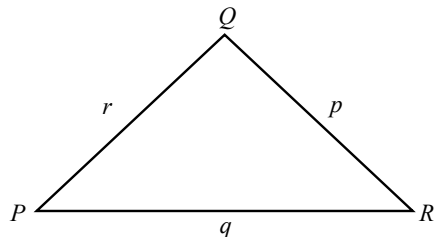
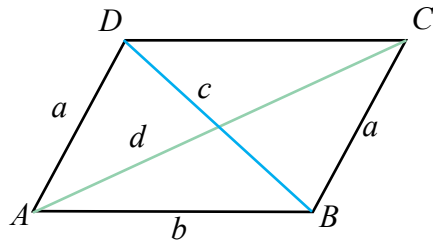
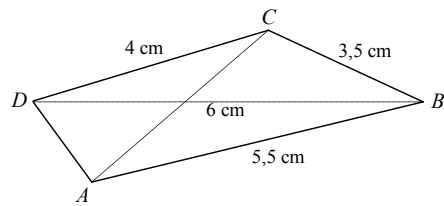
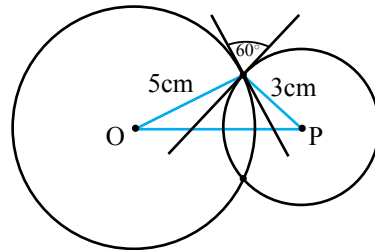
Uji Kompetensi 6.1

1. Kapal laut A dan B berlayar dari titik M pada waktu yang bersamaan. Kapal A berlayar dengan dengan jurusan tiga angka 102^0 dan B berlayar dengan jurusan tiga angka 232^0. Hitunglah jarak kedua kapal tersebut setelah berlayar selama 3 jam, jika kecepatan kapal A 30 km/jam dan kecepatan kapal B adalah 45 km/jam.

2. Tentukan sisi-sisi segitiga ABC, jika diketahui sebagai berikut.
   a) $a + b = 10$, $\angle A = 60^0$, dan $\angle B = 45^0$
   b) $a - b = 6$, $\angle A = 45^0$, dan $\angle B = 30^0$

3. Dua sisi yang berdekatan pada suatu jajargenjang adalah 84 cm dan 68 cm. Sudut apit sisi itu adalah 72°. Hitunglah luas jajargenjang tersebut.

4. Diketahui segitiga ABC seperti gambar di samping. Buktikanlah bahwa $\frac{a \pm b}{c} = \frac{\sin A \pm \sin B}{\sin C}$.

5. Hitunglah unsur-unsur yang belum diketahui berikut ini.
   ΔABC dengan a = 24 cm, b = 32 cm, dan $\angle B = 52^0$
   ΔABC dengan b = 20 cm, b = 18 cm, dan $\angle B = 124^0$
6. Hitunglah besar sudut-sudut pada segitiga ABC, jika diketahui a = 5 cm, b = 7 cm, dan c = 9 cm.

7. Diketahui segitiga PQR seperti gambar di samping. Buktikanlah bahwa $\frac{p}{r} = \frac{\sin(Q + R)}{\sin R}$.

8. Diketahui jajargenjang *ABCD* dengan panjang diagonal *c* dan *d* seperti gambar di samping. Dengan menggunakan aturan kosinus pada segitiga, buktikanlah bahwa $c^2 + d^2 = 2(a^2 + b^2)$.

9. Diketahui segiempat *ABCD* seperti gambar di samping. Jika panjang diagonal *BD* = 6 cm, dengan menggunakan aturan kosinus pada segitiga tentukanlah panjang diagonal *AC*.

10. Dua lingkaran dengan jari-jari 5 cm dan 3 cm berpotongan pada dua titik. Pada salah satu titik potong, garis singgung kedua lingkaran membentuk sudut 60^0 seperti gambar di samping. Tentukanlah jarak kedua titik pusat lingkaran tersebut.

11. Dengan menggunakan aturan kosinus pada segitiga *ABC*, buktikanlah bahwa
    a) $c^2 < a^2 + b^2$ jika $\angle C$ lancip;
    b) $c^2 > a^2 + b^2$ jika $\angle C$ tumpul; dan
    c) $c^2 = a^2 + b^2$ jika $\angle C$ siku-siku.
12. Untuk sebarang segitiga *ABC*, buktikanlah bahwa

    a) $\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$

    b) $\cos A + \cos B + \cos C = \frac{a^2(b + c - a) + b^2(a + c - b) + c^2(a + b - c)}{2abc}$

Projek

Lukislah sebuah segitiga sembarang. Dengan menggunakan penggaris dan busur kemudian ukurlah panjang masing-masing sisi dan sudutnya. Selanjutnya buktikanlah bahwa aturan sinus dan aturan kosinus berlaku pada segitiga tersebut (Agar perhitunganmu akurat, gunakan kalkulator untuk menghitung nilai sinus dan kosinus sudut-sudut segitiga tersebut). Buatlah laporan hasilnya dan persentasikan di depan kelas.

D. PENUTUP

Berdasarkan uraian materi pada Bab 6 ini, beberapa kesimpulan yang dapat dinyatakan sebagai pengetahuan awal untuk mendalami dan melanjutkan bahasan berikutnya. Beberapa kesimpulan disajikan sebagai berikut.

1. Untuk sembarang segitiga ABC, dengan panjang sisi-sisi a, b, c dan $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, berlaku aturan sinus $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.
2. Untuk sembarang segitiga ABC, dengan panjang sisi-sisi a, b, c dan $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, berlaku aturan cosinus
   (i) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
   (ii) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$
   (iii) $c = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
3. Untuk sembarang segitiga ABC, dengan panjang sisi-sisi a, b, c dan $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, berlaku
   Luas $\Delta ABC = \dfrac{1}{2} \times ab \sin C = \dfrac{1}{2} \times bc \sin A = \dfrac{1}{2} \times ac \sin B$

Beberapa hal yang telah kita rangkum di atas adalah modal dasar bagi kamu dalam belajar materi trigonometri secara lebih mendalam pada jenjang pendidikan yang lebih tinggi. Konsep-konsep dasar di atas harus kamu pahami dengan baik karena akan membantu dalam pemecahan masalah dalam kehidupan sehari-hari.

Daftar Pustaka

Anton. Howard, Rorres. Chris. (2005). *Elementary Linear Algebra with Applications*. John Wiley & Sons, Inc

Ball, Deborah Loewenberg. (2003). *Mathematical Proficiency for All Students (Toward a Strategic Research and Development Program in Mathematics Education*). United States of America: RAND.

Checkley , Kathy (2006). *The Essentials of Mathematics, Grades 7 -12*. United States of America: The Association for Supervision and Curriculum Development (ASCD).

Chung, Kai Lai. (2001). *A Course in Probability Theory*, USA: Academic Press.

Committee on science and mathematics teacher preparation, center for education national research council (2001). *Educating Teachers of science, mathematics, and technology (new practice for new millennium*. United States of America: the national academy of sciences.

Douglas. M, Gauntlett. J, Gross. M. (2004). *Strings and Geometry*. United States of America: Clay Mathematics Institute.

Hefferon, Jim (2006). *Linear Algebra*. United States of America: Saint Michael's College Colchester.

Howard, dkk. (2008). *California Mathematics. Consepts, Skills, and Problem Solving 7*. Columbus-USA, The McGraw-Hill Companies, Inc.

Johnstone. P.T. (2002). *Notes on Logic and Set Theory*. New York: University of Cambridge.

Magurn A, Bruce. (2002). Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. United Kingdom: United Kingdom at the University Press, Cambridge.

Slavin, Robert, E. (1994). *Educational psychology, theories and practice*. Fourth Edition. Masschusetts: Allyn and Bacon Publishers.

Sinaga, Bornok. (2007). *Pengembangan Model Pembelajaran Matematika Berdasarkan Masalah Berbasis Budaya Batak*. Surabaya: Program Pascasarjana UNESA.

Tan, Oon Seng. (1995). *Mathematics. A Problem Solving Approach*. Singapore: Federal Publication (S) Pte Lsd.

Urban. P, Owen. J, Martin. D, Haese. R, Haese. S. Bruce. M. (2005). *Mathematics For Yhe International Student* (*International Baccalaureate Mathematics HL Course*). Australia: Haese & Harris Publication.

Van de Walle, John A. (1990). *Elementary school mathematics: teaching developmentally*. New York: Longman.

Van de Walle. Jhon, dkk. (2010). Elementary and Middle School Mathematics (teaching developmentally). United States of America: Allyn & Bacon.